

Lista II.

Funkcja liniowa. Wartość bezwzględna. Równania i nierówności z wartością bezwzględną. Równanie prostej i okręgu na płaszczyźnie.

Warunek równoległości i prostokątności prostych. Wzajemne położenie prostych i okręgów.

- 2.1. Wyznacz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że:
- (a) $f(-1) = 2, f(3) = -2,$
 - (b) jej wykres przecina oś OY w punkcie o rzędnej 4, a 2 jest jej miejscem zerowym.
 - (c) jej wykres przechodzi przez punkt $C(4, 3)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = 3x + 7,$
 - (d) jej wykres przechodzi przez punkt $C(-3, 4)$ i jest prostokątny do prostej $y = \frac{1}{2}x - 5,$
 - (e) jej wykres jest nachylony do osi OX pod kątem 60° i przechodzi przez punkt $D(1, 3),$
 - (f) f nie przyjmuje wartości dodatnich i $f(22) = -3.$
- 2.2. Dane są wierzchołki trójkąta $A(1, 1), B(3, 5)$ i $C(2, 4).$ Napisz równania prostych AB, AC i $BC.$
- 2.3. Wykresy wszystkich funkcji postaci $y = mx, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{R}$ tworzą rodzinę prostych. Zacięnuj część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy, gdy:
- (a) $0 < m < 1,$
 - (b) $m > 10,$
 - (c) $-1 < m < 0,$
 - (d) $m < -1,$
 - (e) $m > 2,$
 - (f) $-3 < m < -\frac{1}{2}.$
- 2.4. Rozwiąż zadanie 2.3 dla funkcji postaci $y = mx + 2.$
- 2.5. Zacięnuj część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy funkcji postaci $y = 2x + m,$ gdy m spełnia warunek:
- (a) $1 < m < 3,$
 - (b) $-1 < m < 0,$
 - (c) $m < -3.$
- 2.6. Narysuj wykresy funkcji:
- $$f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{dla } x < -4 \\ y = x + \sqrt{x^2} & \text{dla } -4 \leq x \leq 4, \\ -5 & \text{dla } x > 4 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \left| \frac{x+16}{3} \right| & \text{dla } x < -1 \\ 2 - 3x & \text{dla } -1 \leq x < 2. \\ \frac{x-14}{3} & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}.$$
- 2.7. Czy punkty $(1, -3)$ i $(0, 0)$ leżą po tej samej stronie prostej $2x - y + 5 = 0.$
- 2.8. Uzupełnij podaną tabelkę:

Znaki liczb a, b	Numery ćwiartek, przez które przechodzi wykres funkcji $y = ax + b$
$a > 0$ i $b > 0$	
$a > 0$ i $b < 0$	
$a > 0$ i $b = 0$	
$a < 0$ i $b > 0$	
$a < 0$ i $b < 0$	
$a < 0$ i $b = 0$	
$a = 0$ i $b > 0$	
$a = 0$ i $b < 0$	

2.9. Rozwiąż równania i nierówności:

(a) $|x + 2| = 2(3 - x)$, (b) $|3x - 2| + x = 11$, (c) $|x| - |x - 2| = 2$,
(d) $|5 - 2x| < 1$, (e) $|3x - 2,5| \geq 2$, (f) $|x - 2| \leq |x + 4|$,
(g) $|x - 3| + |x + 4| = 9$, (h) $|x + 3| + |x - 1| < 5$, (i) $|x + 2| - |x| > 1$.

2.10. Zbadaj dla jakich wartości parametru m każdy z układów równań:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x - y = m - 1 \\ 2x - y = 3 - m \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ mx - y = 2 \end{cases}$.

jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.

2.11. Przedstaw ilustrację graficzną rozwiązań układu:

(a) $\begin{cases} y - 2x < 2 \\ 2x + 3y - 6 < 0 \\ x < 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 < 0 \\ 2x - y < 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2y + 5x \geq 10 \\ 5x - 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$.

2.12. Wyznacz stałą c tak, aby prosta $cx + (c + 1)y + c^2 = 0$ przechodziła przez punkt P :

(a) $P(1, 1)$, (b) $P(1, -1)$.

2.13. Dla jakich wartości parametru p funkcja $f(x) = (7p + 3)x - 2p - 8$ jest rosnąca?

2.14. Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych o równaniach $2x + y - 7m + 7 = 0$ i $x + 3y + 5m^2 - 6m + 1 = 0$ należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych?

2.15. Opisz za pomocą równania lub nierówności:

(a) okrąg; (b) koło; (c) wnętrze koła; (d) zewnątrz koła
o środku $S(2, -1)$ i promieniu $r = 3$. Czy punkt $P(5, -1)$ należy do wnętrza tego koła?

2.16. Podaj długość promienia i współrzędne środka okręgu o równaniu:

(a) $x^2 + y^2 = 5$; (b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$; (c) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; (d) $x^2 + y^2 + y = 0$.

2.17. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o równaniach:

(a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ i $(x + 3)^2 + y^2 = 1$;
(b) $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ i $(x - 1)^2 + y^2 = 1$;
(c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ i $(x - 4)^2 + y^2 = 1$;
(d) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x - 120 = 0$ i $x^2 + y^2 - 200 = 0$.

2.18. Zbadaj wzajemne położenie:

(a) prostej $x + 2y - 3 = 0$ i okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$;
(b) prostej $x + 4y - 1 = 0$ i okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 5y = 0$;
(c) prostej $2x + y = 0$ i okręgu $x^2 + x + y^2 = 0$.

2.19. Wyznacz punkty przecięcia

(a) okręgu $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ z prostą $x + 2y - 4 = 0$;
(b) okręgu $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ z osiami układu współrzędnych;
(c) okręgów $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ i $x^2 + y^2 + x - 7y = 0$.