Lista III. Miara łukowa kąta. Definicje i własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta. Wzory redukcyjne. Tożsamości trygonometryczne.

3.1. Z wierzchołka kąta α jako ze środka zakreślono okrąg o promieniu długości r. Dane są miara kąta α w radianach i długość promienia r. Oblicz długość łuku, na którym jest oparty kąt α.

3.2. Uzupełnij poniższe tabele:

miara kąta w stopniach	1°	30°	45°	60°	90°	120°	225°	315°	450°	570°
miara kąta w radianach										

miara kąta w radianach	1	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{8}{9}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
miara kąta w stopniach										

3.3. Oblicz wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów o następujących miarach: $135^\circ,\ 150^\circ,\ 240^\circ,\ 1740^\circ,\ 660^\circ,\ -150^\circ$.

3.4. Wyraź za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów dodatnich nie większych od 45°: $\sin 115^\circ,\ \cos 315^\circ,\ \operatorname{tg} 165^\circ, \cos 1000^\circ,\ \operatorname{ctg} 85^\circ$.

3.5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

(a) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

(b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,

(c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,

(d) $\sin\alpha = -\sqrt{0,2}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

3.6. Uzupełnij poniższe tabele. Jeśli kąt nie istnieje, wpisz znak $\times$:

		$\alpha \in$			
		$(0, 90^\circ)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	$(180^\circ, 270^\circ)$	$(270^\circ, 360^\circ)$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$				
	$-\frac{1}{2}$				
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				

		$\sin\alpha$					
		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$						
	$-\frac{1}{2}$						
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$						
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$						
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$						
	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$						

3.7. Zbadaj, czy istnieje kąt α, taki że:

(a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, **(b)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

3.8. Oblicz:

(a) $\sin(\alpha + 45^\circ)$ mając dane: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

(b) $\cos(60^\circ - \alpha)$ mając dane: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

3.9. Uprość wyrażenia:

(a) $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha$, **(b)** $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha$,

(c) $\cos\alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, **(d)** $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3.10. Sprawdź następujące tożsamości:

(a) $\left(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$, **(b)** $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$,

(c) $(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x) = \sin^2 x$, **(d)** $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$.

3.11. Narysuj wykresy podanych funkcji. Na ich podstawie określ zbiory wartości tych funkcji. Wskaż najmniejsze i największe wartości osiągane przez te funkcje (o ile da się wskazać).

(a) $y = \sin 2x$, **(b)** $y = |\cos x| - 1$, **(c)** $y = 2 - \sin x$,

(d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, **(e)** $y = 2\sin\frac{x}{2} - 1$, **(f)** $y = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

(g) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1$, **(h)** $y = \operatorname{tg} 2x$, **(i)** $y = 2 + \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

(j) $y = \operatorname{tg} 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, **(k)** $y = -\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, **(l)** $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$,

(m) $y = \sin|x|$, **(n)** $y = \sin x + |\sin x|$, **(o)** $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

3.12. Zbadać, które z podanych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

(a) $y = \sin 3x$, **(b)** $y = \sin^2 x$, **(c)** $y = x\cos x$,

(d) $y = \sin x \cos x$, **(e)** $y = \frac{\sin x}{x}$, **(f)** $y = \frac{3\sin x}{1 + 2\sin^2 x}$.

3.13. Wyznacz okres podstawowy następujących funkcji:

(a) $y = \cos\frac{x}{2}$, **(b)** $y = \operatorname{tg} 3x$, **(c)** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

(d) $y = 1 + 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$, **(e)** $y = 1 - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, **(f)** $y = \operatorname{tg}\frac{2\pi x}{5} + \operatorname{ctg}\frac{2\pi x}{5}$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY