

Lista IV.

Równania i nierówności trygonometryczne. Funkcje cyklometryczne.

4.1. Rozwiąż podane równania:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sin 2x = 1, & \text{(b)} \operatorname{tg} 3x = -1, & \text{(c)} \sin x = \cos x, \\ \text{(d)} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1, & \text{(e)} \operatorname{tg} \left(-\frac{x}{4} - 1 \right) = \sqrt{3}, & \text{(f)} \cos 3x = -\frac{1}{2}, \\ \text{(g)} \sin(2x - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{(h)} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}, & \text{(i)} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}, \end{array}$$

4.2. Zbadaj dla jakich wartości parametru a istnieje rozwiązanie równania:

$$\text{(a)} \sin x = \frac{2a - 3}{4 - a}, \quad \text{(b)} \cos x = \frac{5a - 2}{2 - 3a}.$$

4.3. Dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ rozwiąż podane nierówności:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sin x - \frac{1}{2} < 0, & \text{(b)} \sin 2x < \frac{1}{2}, & \text{(c)} \cos \frac{x}{5} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{(d)} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x < 0, & \text{(e)} \operatorname{ctg} 2x > 1, & \text{(f)} \operatorname{tg}^2 x \geq 1, \\ \text{(g)} 2 \sin(\pi - 2x) > -1, & \text{(h)} \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 < 0, & \text{(i)} \sin x \leq \cos x, \end{array}$$

4.4. Podaj rozwiązania nierówności z zadania 4.3 dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

4.5. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \arcsin \frac{1}{2}, & \text{(b)} \arccos(-1), & \text{(c)} \operatorname{arctg} \sqrt{3}, \\ \text{(d)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}, & \text{(e)} \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right), & \text{(f)} \sin \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} \right), \\ \text{(g)} \cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right), & \text{(h)} \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & \text{(i)} \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} \right). \end{array}$$

4.6. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} y = \arcsin \frac{2}{x}, & \text{(b)} y = \operatorname{arctg}(x + 2), & \text{(c)} y = \arccos 2x, \\ \text{(d)} y = \arcsin \frac{x + 2}{4}, & \text{(e)} y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}, & \text{(e)} y = \log \arcsin(2 - x^2). \end{array}$$

4.7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} y = \cos^2 x \text{ dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], & \text{(b)} y = 2 \sin 3x \text{ dla } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right], \\ \text{(c)} y = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^2} \text{ dla } x \in [0, 1], & \\ \text{(d)} y = 1 + 2 \sin \frac{x - 1}{x + 1} \text{ dla } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x - 1}{x + 1} \leq \frac{\pi}{2}. & \end{array}$$

4.8. Sporządź wykres funkcji:

$$\text{(a)} y = 2 \arccos 2x, \quad \text{(b)} y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2x, \quad \text{(c)} y = \arcsin \frac{1 - x}{4}.$$

