Lista V.

Funkcja kwadratowa i jej wykresy. Równania i nierówności kwadratowe. Wzory Viete'a.

5.1. Wykresy funkcji $y = x^2 + bx$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka parabol. Wyznacz parametr b tak, aby: **(a)** do wykresu należał punkt $A(-1, 3)$, **(b)** miejscem zerowym była liczba 4, **(c)** funkcja miała tylko jedno miejsce zerowe. Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?

5.2. Wykresy funkcji $y = x^2 + b$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Ustal parametr b tak, aby: **(a)** do wykresu należał punkt $A(2, 3)$, **(b)** funkcja miała miejsca zerowe -1 i 1, **(c)** do wykresu należał punkt $B(-1, -1)$. Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?

5.3. Wykresy funkcji $y = ax^2 + 3$, gdzie $a \neq 0$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz parametr a tak, aby: **(a)** do wykresu należał punkt $A(-2, -1)$, **(b)** do wykresu należał punkt $B(1, 3)$, **(b)** funkcja miała miejsca zerowe -2 i 2.

5.4. Wykresy funkcji $y = x^2 + 3x + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz parametr c tak, aby: **(a)** do wykresu należał punkt $A(-1, 3)$, **(b)** funkcja miała miejsca zerowe 1, **(c)** wykres był styczny do osi x. Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?

5.5. Do wykresu funkcji $y = ax^2 + bx + c$ należą punkty A, B, C. Wyznacz a, b i c.
(a) $A(1, -4)$, $B(2, -3)$, $C(-1, 0)$, **(b)** $A(-1, 6)$, $B(3, 6)$, $C(4, 11)$.

5.6. Oblicz współczynniki trójmianu $y = ax^2 + bx + c$, jeśli do jego wykresu należy punkt $A(3, 0)$ i $y_{max} = 12$ dla $x = 1$.

5.7. Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = x^2 + 5x + 6$ względem: **(a)** osi x, **(b)** osi y, **(c)** punktu $(0, 0)$.

5.8. Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = x^2 - 4$ względem: **(a)** osi x, **(b)** osi y, **(c)** punktu $(0, 0)$.

5.9. Jakie należy wykonać przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji:
(a) $y = 2x^2 - 4$, **(b)** $y = 2(x - 2)^2$, **(c)** $y = 2(x + 3)^2 - 6$,
(d) $y = 2(x + 1)^2 - 2x - 6$, **(e)** $y = 2x^2 + 6$, **(f)** $y = 2x^2 + 6x - 8$.

5.10. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = x^2$, naszkicuj wykresy funkcji:
(a) $y = -x^2$, **(b)** $y = x^2 + 1$, **(c)** $y = 2 - x^2$, **(d)** $y = (x + 1)^2$,
(e) $y = (x - 2)^2$, **(f)** $y = -(x + 3)^2$, **(g)** $y = x^2 - x - 2$, **(h)** $y = x^2 - 3x$.

5.11. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:
(a) $y = -x^2 - 3x + 10 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$, **(b)** $y = 2x^2 - x + 1 \quad x \in \langle -2; 1\rangle$.

5.12. Wyznacz miejsca zerowe, współrzędne wierzchołka paraboli i punkt przecięcia wykresu z osią x następujących funkcji kwadratowych:
(a) $y = x^2 - 7$, **(b)** $y = x^2 + \sqrt{5}$, **(c)** $y = x^2 - 6x$, **(d)** $y = x^2 + 8x + 16$.

5.13. Wyznacz brakujące współrzędne punktów $A(-1, ?)$, $B(2, ?)$, $C(\sqrt{2}, ?)$, $D(?, 3)$, $E(?, -2)$ tak, aby punkty te należały do wykresów funkcji podanych w zadaniu poprzednim.

5.14. Daną liczbę rzeczywistą a przedstaw jako sumę dwóch takich liczb, aby suma kwadratów tych liczb była najmniejsza.

5.15. Liczbę 8 przedstaw jako sumę takich dwóch składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.

5.16. Siatką drucianą długości 60 m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary winien mieć plac, aby jego pole było największe?

5.17. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem. Jak powinna być podstawa prostokąta, aby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?

5.18. Wyróżniki podanych trójmianów są dodatnie. Oblicz sumę i iloczyn miejsc zerowych każdego z trójmianów (bez obliczania miejsc zerowych):
(a) $y = 2x^2 - 3x - 1$, **(b)** $y = -3x^2 + 5x + 2$, **(c)** $y = 0{,}5x^2 - 4x - 3$.

5.19. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, mając dane:
(a) $x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 3$, **(b)** $x_1 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = -6$, **(c)** $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$.

5.20. Rozwiąż równanie z niewiadomą x. Zbadaj liczbę rozwiązań w zależności od m i n.
(a) $x^2 - m^2 = 2mx + 1$, **(b)** $x^2 - mx + m = 1$, **(c)** $x^2 + mn = (m + n)x$.

5.21. Dla jakich wartości parametru p rozwiązania równania są liczbami ujemnymi:
(a) $x^2 + 2(p + 1)x + 9k - 5 = 0$, **(b)** $x^2 + (p - 5)x + 2p^2 + p + 0,5 = 0$.

5.22. Dla jakich wartości k rozwiązania równania są liczbami rzeczywistymi różnych znaków:
(a) $x^2 + (2k - 3)x + 2k + 5 = 0$, **(b)** $x^2 + 2(3k - 1)x + 3k + 11 = 0$.

5.23. Rozwiąż nierówności:
(a) $x^2 - 8x + 12 < 0$, **(b)** $x^2 - 2x - 8 > 0$, **(c)** $2x(x - 10) \geqslant 4(x - 8)$.

5.24. Dla jakich wartości m zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych:
(a) $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + 3m - 1 > 0$, **(b)** $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 > 0$.

5.25. Dla jakich wartości a zbiorem wartości trójmianu jest $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$:
(a) $y = (1 - a^2)x^2 + 2(1 - a)x - 2 > 0$, **(b)** $y = -x^2 + 2ax + a - 2$.

5.26. Dla jakich wartości k zbiorem wartości funkcji jest $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$:
(a) $y = x^2 - (2 + k)x + 1$, **(b)** $y = kx^2 - 4x + k + 3$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY