

Lista V.

Funkcja kwadratowa i jej wykresy. Równania i nierówności kwadratowe. Wzory Viete'a.

- 5.1. Wykresy funkcji $y = x^2 + bx$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka parabol. Wyznacz parametr b tak, aby: (a) do wykresu należał punkt $A(-1, 3)$, (b) miejscem zerowym była liczba 4, (c) funkcja miała tylko jedno miejsce zerowe. Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?
- 5.2. Wykresy funkcji $y = x^2 + b$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Ustal parametr b tak, aby: (a) do wykresu należał punkt $A(2, 3)$, (b) funkcja miała miejsca zerowe -1 i 1 , (c) do wykresu należał punkt $B(-1, -1)$. Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?
- 5.3. Wykresy funkcji $y = ax^2 + 3$, gdzie $a \neq 0$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz parametr a tak, aby: (a) do wykresu należał punkt $A(-2, -1)$, (b) do wykresu należał punkt $B(1, 3)$, (c) funkcja miała miejsca zerowe -2 i 2 .
- 5.4. Wykresy funkcji $y = x^2 + 3x + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz parametr c tak, aby: (a) do wykresu należał punkt $A(-1, 3)$, (b) funkcja miała miejsca zerowe 1 , (c) wykres był styczny do osi x . Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?
- 5.5. Do wykresu funkcji $y = ax^2 + bx + c$ należą punkty A, B, C . Wyznacz a, b i c .
(a) $A(1, -4), B(2, -3), C(-1, 0)$, (b) $A(-1, 6), B(3, 6), C(4, 11)$.
- 5.6. Oblicz współczynniki trójmianu $y = ax^2 + bx + c$, jeśli do jego wykresu należy punkt $A(3, 0)$ i $y_{max} = 12$ dla $x = 1$.
- 5.7. Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = x^2 + 5x + 6$ względem: (a) osi x , (b) osi y , (c) punktu $(0, 0)$.
- 5.8. Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y = x^2 - 4$ względem: (a) osi x , (b) osi y , (c) punktu $(0, 0)$.
- 5.9. Jakie należy wykonać przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji:
(a) $y = 2x^2 - 4$, (b) $y = 2(x - 2)^2$, (c) $y = 2(x + 3)^2 - 6$,
(d) $y = 2(x + 1)^2 - 2x - 6$, (e) $y = 2x^2 + 6$, (f) $y = 2x^2 + 6x - 8$.
- 5.10. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = x^2$, naszkicuj wykresy funkcji:
(a) $y = -x^2$, (b) $y = x^2 + 1$, (c) $y = 2 - x^2$, (d) $y = (x + 1)^2$,
(e) $y = (x - 2)^2$, (f) $y = -(x + 3)^2$, (g) $y = x^2 - x - 2$, (h) $y = x^2 - 3x$.
- 5.11. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:
(a) $y = -x^2 - 3x + 10$ $x \in \langle 0; 2 \rangle$, (b) $y = 2x^2 - x + 1$ $x \in \langle -2; 1 \rangle$.

- 5.12. Wyznacz miejsca zerowe, współrzędne wierzchołka paraboli i punkt przecięcia wykresu z osią x następujących funkcji kwadratowych:
(a) $y = x^2 - 7$, (b) $y = x^2 + \sqrt{5}$, (c) $y = x^2 - 6x$, (d) $y = x^2 + 8x + 16$.
- 5.13. Wyznacz brakujące współrzędne punktów $A(-1, ?)$, $B(2, ?)$, $C(\sqrt{2}, ?)$, $D(?, 3)$, $E(?, -2)$ tak, aby punkty te należały do wykresów funkcji podanych w zadaniu poprzednim.
- 5.14. Daną liczbę rzeczywistą a przedstaw jako sumę dwóch takich liczb, aby suma kwadratów tych liczb była najmniejsza.
- 5.15. Liczbę 8 przedstaw jako sumę takich dwóch składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.
- 5.16. Siatką drucianą długości 60 m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary winien mieć plac, aby jego pole było największe?
- 5.17. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkołem. Jak powinna być podstawa prostokąta, aby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?
- 5.18. Wyróżniki podanych trójmianów są dodatnie. Oblicz sumę i iloczyn miejsc zerowych każdego z trójmianów (bez obliczania miejsc zerowych):
(a) $y = 2x^2 - 3x - 1$, (b) $y = -3x^2 + 5x + 2$, (c) $y = 0,5x^2 - 4x - 3$.
- 5.19. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, mając dane:
(a) $x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 3$, (b) $x_1 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = -6$, (c) $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$.
- 5.20. Rozwiąż równanie z niewiadomą x . Zbadaj liczbę rozwiązań w zależności od m i n .
(a) $x^2 - m^2 = 2mx + 1$, (b) $x^2 - mx + m = 1$, (c) $x^2 + mn = (m + n)x$.
- 5.21. Dla jakich wartości parametru p rozwiązania równania są liczbami ujemnymi:
(a) $x^2 + 2(p + 1)x + 9k - 5 = 0$, (b) $x^2 + (p - 5)x + 2p^2 + p + 0,5 = 0$.
- 5.22. Dla jakich wartości k rozwiązania równania są liczbami rzeczywistymi różnych znaków:
(a) $x^2 + (2k - 3)x + 2k + 5 = 0$, (b) $x^2 + 2(3k - 1)x + 3k + 11 = 0$.
- 5.23. Rozwiąż nierówności:
(a) $x^2 - 8x + 12 < 0$, (b) $x^2 - 2x - 8 > 0$, (c) $2x(x - 10) \geq 4(x - 8)$.
- 5.24. Dla jakich wartości m zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych:
(a) $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + 3m - 1 > 0$, (b) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 > 0$.
- 5.25. Dla jakich wartości a zbiorem wartości trójmianu jest $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$:
(a) $y = (1 - a^2)x^2 + 2(1 - a)x - 2 > 0$, (b) $y = -x^2 + 2ax + a - 2$.
- 5.26. Dla jakich wartości k zbiorem wartości funkcji jest $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$:
(a) $y = x^2 - (2 + k)x + 1$, (b) $y = kx^2 - 4x + k + 3$.