

Lista VII.

Funkcja homograficzna i jej własności.

Funkcja wymierna, rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Równania i nierówności wymierne.

7.1. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{5x - 6}{2x - 3}$.

- (a) Określ dziedzinę funkcji f .
- (b) Znajdź miejsce zerowe funkcji f .
- (c) Znajdź ten argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 3.
- (d) Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OY .
- (e) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe od 5.

7.2. Dane są funkcje $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 3}$ i $g(x) = \frac{x + 1}{x - 3}$.

- (a) Naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.
- (b) Określ przedziały monotoniczności obu funkcji.
- (c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

7.3. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x + b}{x + d}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Funkcja f ma miejsce zerowe równe 4.

- (a) Wyznacz współczynniki b i d .
- (b) Określ zbiór wartości funkcji f i przedziały monotoniczności tej funkcji.

7.4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x + 2}{x - 2} \right|$, a następnie określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = p$ w zależności od wartości parametru p .

7.5. Naszkicuj wykresy funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x - 1}{x}$ (b) $f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$ (c) $f(x) = \frac{-2|x| - 1}{|x| + 2}$

7.6. Jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{x^3 + bx^2 - 13x - 10}{x + 1}$ jest 5.

- (a) Znajdź współczynniki b .
- (b) Znajdź pozostałe miejsca zerowe funkcji f .
- (c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

Podaną funkcję wymierną niewłaściwą przedstaw w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

7.7. $\frac{x^6}{x^2 + 2x + 2}$.

7.8. $\frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$.

7.9. $\frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$.

7.10. $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^5 - 4x}$.



Podaj rozkłady na ułamki proste wskazanych funkcji wymiernych właściwych:

$$7.11. \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2}. \quad 7.12. \frac{1}{x^2 + x - 2}. \quad 7.13. \frac{2x + 4}{x^3 - 2x^2}. \quad 7.14. \frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}.$$

$$7.15. \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}. \quad 7.16. \frac{x}{(x^2 + 2)^2}. \quad 7.17. \frac{x}{1 - x^4}. \quad 7.18. \frac{1}{x^8 + x^6}.$$

Rozwiąż podane równania i nierówności wymierne oraz podaj ich ilustrację graficzną:

$$7.19. \frac{1}{x} = x. \quad 7.20. \frac{1}{x} = -3x. \quad 7.21. \frac{3}{x} \leq 2 + x. \quad 7.22. \frac{1}{x} \geq x^2.$$

Rozwiąż podane równania i nierówności wymierne:

$$7.23. \frac{x^2 - 3,5x + 1,5}{x^2 - x - 6} = 0. \quad 7.24. \frac{2x - 2}{x^2 - 36} - \frac{x - 2}{x^2 - 6x} = \frac{x - 1}{x^2 + 6x}.$$

$$7.25. \frac{12}{1 - 9x^2} = \frac{1 - 3x}{1 + 3x} + \frac{1 + 3x}{3x - 1}. \quad 7.26. \frac{2x - 3}{x - 1} + 1 = \frac{6x - x^2 - 6}{x - 1}.$$

$$7.27. \frac{2}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6x}. \quad 7.28. \frac{x(x - 5)}{1 - x} \geq 0.$$

$$7.29. \frac{x^2(2x + 7)}{1 - 2x} \geq 0. \quad 7.30. \frac{(2 + x)^2}{x - x^2} \leq 0.$$

$$7.31. \frac{9x - x^3}{x^3} \geq 0. \quad 7.32. \frac{(x - 2)^2 \cdot (2x + 1)^3}{(x^2 - 1)} \leq 0.$$

$$7.33. x^2 - \frac{1}{x^3} > x - \frac{1}{x^2}. \quad 7.34. 1 < \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} < 2.$$

$$7.35. \frac{x^4 - 16}{x^2 + 1} > 0. \quad 7.36. \frac{2(x + 3)(x - 2)^2}{(x - 1)^3} \leq 0.$$

$$7.37. \frac{(x - 1)(x + 2)^2}{-1 - x} < 0. \quad 7.38. \frac{x - 2}{x + 1} < -\frac{1}{2}$$

$$7.39. \frac{x - 1}{x + 1} < x. \quad 7.40. \frac{(2 - x^2)(x - 3)^3}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} \geq 0.$$

$$7.41. \left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| > 2. \quad 7.42. \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$$

$$7.43. \frac{|x - 2|}{x - 2} > 0. \quad 7.44. \frac{|x + 3| + x}{x + 2} > 1.$$

7.45. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$. Rozwiąż równanie $f\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1$.

7.46. Rozwiąż układ nierówności
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} \leq 2 \\ \frac{16 - 5x^2}{3 - x} > 0 \end{cases}.$$