

### Lista VIII.

Funkcja wykładnicza. Równania i nierówności wykładnicze.

8.1. Narysować wykres funkcji:

(a)  $y = 2^{x-1} + 2$ , (b)  $y = -2^x + 1$ , (c)  $y = 3^{-x}$ , (d)  $y = 3^{|x|+2}$ , (e)  $y = |2^x - 2|$ .

8.2. Rozwiąż równanie:

(a)  $2^{x+1} = 4$ , (b)  $(5\sqrt{5})^x = 0,04 \cdot 125^{x-2}$ , (c)  $3^{x+1} + 3^x = 36$ ,  
(d)  $2^x + 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} = 18$ , (e)  $7^{x-1} = 5^{1-x}$ , (f)  $4 \cdot 2^{x^2} = 2^{3x}$ ,  
(g)  $(\frac{4}{9})^x \cdot (\frac{27}{8})^{x-1} = \frac{2}{3}$ , (h)  $(\frac{2}{3})^{3x-7} = (\frac{3}{2})^{7x-2}$ .

8.3. Rozwiąż równanie:

(a)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ , (b)  $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ , (c)  $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ ,  
(d)  $7^x + 7^{1-x} - 8 = 0$ , (e)  $2^{x^2} + 2^{13-x^2} = 528$ , (f)  $3^{x^2+2x} - 3^{(x+3)(x-1)} = 26$ ,  
(g)  $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$ .

8.4. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie  $5^x = 3 - k$  nie ma rozwiązań?

8.5. Dla jakich wartości parametru  $p$  równanie  $(p-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$  ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

8.6. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $4^x + (m-2)2^x + 4 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

8.7. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie:

(a)  $6^x = m - 5$ , (b)  $9^x - 2 \cdot 3^x + m = 0$ , (c)  $m4^x + 4 \cdot 2^x + 1 = 0$ .

8.8. Rozwiąż równanie  $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}+x} - 3^{2x-1}$ .

8.9. Rozwiąż nierówność:

(a)  $2^{3x-5} > 0$ , (b)  $3^{x^2-9x+7} > 1$ , (c)  $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+2} > 810$ ,  
(d)  $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 \leq 0$ , (e)  $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 < 0$ , (f)  $2^{-5x+3} < 4^{-\frac{1}{2}x^2}$ ,  
(g)  $(\frac{2}{3})^x > \frac{4}{9}$ , (h)  $(\sqrt{6})^{x+1} > (\sqrt[3]{6})^x$ , (i)  $(\frac{2}{3})^{x^2} > (\sqrt{\frac{3}{2}})^x$ ,  
(j)  $2^{2x+1} \geq 11 \cdot 2^x - 5$ , (k)  $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$ , (l)  $2^{4-|x^2-4x|} \geq 4$ ,  
(m)  $\frac{2^x+1-2^{1-x}}{1-2^{2-x}} \geq 0$ , (n)  $0 < 2^{x^2-x-6} \leq 1$ , (o)  $\frac{1}{27} < (\frac{1}{3})^{3x-1} \leq 3$ .

8.10. Rozwiąż graficznie: (a) równanie  $|3^x - 3| = -x^2 + 2x - 1$ , (b) nierówność  $3^{|x|} > -x^2 + 1$ .

8.11. Dane są funkcje:  $f(x) = 3^x$  oraz  $g(x) = 6^x - 2^{x+1} + 8$ .

(a) Rozwiąż równanie  $[f(x)]^2 - 6f(x) = 27$ ,

(b) Sporządź wykres funkcji  $h(x) = |1 - f(x - 1)|$ . Na jego podstawie określ liczbę pierwiastków równania  $h(x) = a$  w zależności od parametru  $a$ ,

(c) Rozwiąż nierówność  $f(x) < g(x)$ .

8.12. Niech  $f(x) = 5^{2x} + 2^{2x}$  oraz  $g(x) = 5^{x-4} + 2^{x+2}$ . Rozwiąż nierówność  $g(x + 2) \geq f(\frac{x}{2})$ .

8.13. Wyznacz liczbę całkowitą  $p$  dla której równanie  $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + p = 0$  ma dwa pierwiastki całkowite.

8.14. Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $x^2 - (2^a - 1)x - 3(4^{a-1} - 2^{a-2}) = 0$  ma dwa pierwiastki różnych znaków?

8.15. Dla jakich wartości parametru  $a$  rozwiązanie równania  $10^{x+1} - 9 \cdot 10^x = a$  spełnia nierówność  $x^2 + x - 2 \leq 0$ ?