

Lista IX.

Logarytm i jego własności. Funkcja logarytmiczna.  
Równania i nierówności logarytmiczne.

9.1. Oblicz:

- |                            |                              |  |   |
|----------------------------|------------------------------|--|---|
| (a) $\log_2 16$ ,          | (e) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ , | (i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ , | (m) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}} 8$ ,     |
| (b) $\log_2 \frac{1}{4}$ , | (f) $\log_{27} 3$ ,          | (j) $\log_{\frac{2}{3}} 2,25$ ,        | (n) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$ , |
| (c) $\log_3 27$ ,          | (g) $\log_{25} 5$ ,          | (k) $\log_{\sqrt{2}} 2$ ,              | (o) $\log_6 1$ ,                        |
| (d) $\log_{10} 0,01$ ,     | (h) $\log_{64} 16$ ,         | (l) $\log_5 5\sqrt{5}$ ,               | (p) $\log_{11} 11$ .                    |

9.2. Znajdź liczbę  $x$ , jeżeli:

- |                                   |                                    |                                 |  |
|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|--|
| (a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$ , | (e) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ ,  | (i) $\log_x 64 = 3$ ,           | (m) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ , |
| (b) $\log_2 x = 5$ ,              | (f) $\log_{0,01} x = -1$ ,         | (j) $\log_x 8 = \frac{1}{2}$ ,  | (n) $\log_x 0,125 = -2$ ,                |
| (c) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ ,     | (g) $\log_9 x = \frac{1}{2}$ ,     | (k) $\log_x \frac{1}{81} = 4$ , | (o) $\log_x 625 = \frac{3}{4}$ ,         |
| (d) $\log_3 x = -3$ ,             | (h) $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$ , | (l) $\log_x 4 = -2$ ,           | (p) $\log_x 1 = 5$ .                     |

9.3. Oblicz:

- |                       |                        |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| (a) $2^{\log_2 32}$ , | (c) $4^{\log_4 3}$ ,   | (e) $49^{\log_7 2}$ , | (g) $2^{3-\log_2 3}$ , |
| (b) $3^{\log_3 5}$ ,  | (d) $10^{2+2\log 7}$ , | (f) $16^{\log_2 3}$ , | (h) $8^{1-\log_2 3}$ . |

9.4. Wyznacz dziedzinę funkcji ( $p > 0, p \neq 1$ ):

- |  |  |                                    |
|--|--|------------------------------------|
| (a) $y = \log_p(2x + 1)$ ,                               | (d) $y = \log_p(x^2 + 1)$ ,                                | (g) $y = \log_p(x^2 + 2x + 3)$ ,   |
| (b) $y = \log_p(1 - x)$ ,                                | (e) $y = \log_p  x $ ,                                     | (h) $y = \log_p(2^x - 8)$ ,        |
| (c) $y = \log_p(x^2)$ ,                                  | (f) $y = \log_p(x^2 - 1)$ ,                                | (i) $y = \log_p \frac{x+3}{2-x}$ , |
| (j) $y = \log_2[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)]$ , | (k) $y = \sqrt{\log_{0,1}(2x - 1) - \log_{0,1}(5 - 3x)}$ . |                                    |

9.5. Naskicuj wykresy funkcji:

- |                        |                           |                                    |
|------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| (a) $y = \log_2  x $ , | (c) $y = \log_2(x - 2)$ , | (e) $y = \log_3(1 - x)$ ,          |
| (b) $y =  \log_2 x $ , | (d) $y = 2 + \log_2 x$ ,  | (f) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$ . |

Dla każdej z tych funkcji podaj: dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

9.6. Rozwiąż graficznie równanie:

- |                        |                             |   |
|------------------------|-----------------------------|---|
| (a) $\log_2 x = -2x$ , | (b) $\log_2 x = -x^2 + 1$ , | (c) $\log_{\frac{1}{2}} x = -x^3 + 3$ . |
|------------------------|-----------------------------|---|

9.7. Określ znak liczby:

(a)  $\frac{\log_3 5 - \log_5 3}{\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3}$ ,

(b)  $\frac{\log_4 3 - \log_2 5}{\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} 2}$ ,

(c)  $(\log_5 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{3}) \cdot (\log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 0,5)$ .

9.8. Oblicz bez użycia tablic:

(a)  $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$ ,

(c)  $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$ ,

(b)  $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$ ,

(d)  $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$ .

9.9. Korzystając z definicji logarytmu rozwiąż równanie:

(a)  $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$ ,

(c)  $\log_{(x-2)} 9 = 2$ ,

(b)  $\log_2[\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$ ,

(d)  $\log_2(x^2 + 6x + 17) = 3$ .

9.10. Rozwiąż nierówności:

(a)  $\log_2(x + 1) > 3$ ,

(d)  $\log_{\frac{1}{4}} |x - 3| < -2$ ,

(b)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 5) < -4$ ,

(e)  $\log_x 4 < 2$ ,

(c)  $\log_3(x^2 + 2) > 3$ ,

(f)  $\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1$ .

9.11. Rozwiąż równania:

(a)  $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$ ,

(c)  $\log(3x + 3) + \log(x + 8) = 2$ ,

(b)  $3^{\log x} = \frac{1}{27}$ ,

(d)  $\log(3x - 91) - \log(30 - x) = 1$ .

9.12. Rozwiąż równania:

(a)  $\frac{2\log x}{\log(5x-4)} = 1$ ,

(e)  $\log(2x + 14) + \log(x + 12) = 3$ ,

(b)  $2\log x + \log(6 - x^2) = 0$ ,

(f)  $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$ ,

(c)  $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$ ,

(g)  $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$ ,

(d)  $\log(x - 5) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(3x - 20)$ ,

(g)  $\log |2x - 3| - \log |3x - 2| = 1$ .

9.13. Rozwiąż nierówności:

(a)  $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$ ,

(e)  $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 1$ ,

(b)  $\log_x(x^3 - 3) - \log_x(x - 1) > 1$ ,

(f)  $|3\log x - 1| < 2$ ,

(c)  $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 9\log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0$ ,

(g)  $\log_{(2x-3)} x > 1$ ,

(d)  $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3$ ,

(h)  $\log_{(2x-3)}(3x^2 - 7x + 3) < 2$ .

9.14. Rozwiąż równania:

(a)  $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$ ,

(d)  $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$ ,

(b)  $\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$ ,

(e)  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ ,

(c)  $x^{\log x} = 100x$ ,

(d)  $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$ .