

**Lista II.**

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

**Wzory redukcyjne.**

**2.1.** Oblicz wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów o następujących miarach:  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $1740^\circ$ ,  $660^\circ$ ,  $-150^\circ$ .

**2.2.** Wyraż za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów dodatnich nie większych od  $45^\circ$ :  
 $\sin 115^\circ$ ,  $\cos 315^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 165^\circ$ ,  $\cos 1000^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 85^\circ$ .

**2.3.** Oblicz bez użycia tablic matematycznych:

(a)  $\sin 1200^\circ + \cos(-1080^\circ)$ , (b)  $4 \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ$ , (c)  $2 \sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ$ .

**2.4.** Oblicz: (a)  $\sin^2 62^\circ + \sin^2 28^\circ$ , (b)  $\operatorname{ctg} 44^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$ .

**2.5.** Oblicz:

(a)  $\sin(\alpha + 45^\circ)$  mając dane:  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;

(b)  $\cos(60^\circ - \alpha)$  mając dane:  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ,

(c)  $\sin 15^\circ$ , jeśli  $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ,

(d)  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ , jeśli  $\sin \alpha = 0,28$ ,

(e)  $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  i  $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$ , jeśli  $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$ ,

(f)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ,  $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ ,  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$  i  $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$ , jeśli  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$  i  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

**2.6.** Uprość wyrażenia:

(a)  $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ; (b)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ ;

(c)  $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ; (d)  $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .

(e)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$ ;

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi - x) \left[ \operatorname{tg}(\pi + x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \right]; \\
 \text{(g)} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right); \quad \text{(h)} \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \quad \text{(i)} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha; \\
 \text{(j)} & \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha; \quad \text{(k)} \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad \text{(l)} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

### Tożsamości trygonometryczne.

Udowodnić, że:

$$2.7. \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ - 4 \cos 20^\circ = 1.$$

$$2.8. \cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ.$$

$$2.9. \sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2 \sin 203^\circ \cdot (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0.$$

Sprawdź następujące tożsamości. Dla jakich  $x$  równości te nie zachodzą?

$$2.10. (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x.$$

$$2.11. (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

$$2.12. (1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x) = \sin^2 x.$$

$$2.13. \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x.$$

$$2.14. \frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$2.15. 1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}.$$

$$2.16. \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$$

$$2.17. \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Udowodnić następujące tożsamości:

$$2.18. \sin 2x - \operatorname{tg} x = \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$2.19. 4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x.$$

$$2.20. \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

$$2.21. \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y.$$

$$2.22. 1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

$$2.23. \frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} = 1 + \sin x.$$

$$2.24. \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$$

$$2.25. \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x.$$

$$2.26. \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$2.27. \frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin 2x.$$

## Równania i nierówności trygonometryczne.

Rozwiąż podane równania:

2.28.  $\sin 2x = 1.$

2.29.  $\sin 3x = 0.$

2.30.  $\operatorname{tg} 3x = -1$

2.31.  $\cos 3x = -\frac{1}{2}.$

2.32.  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1.$

2.33.  $\operatorname{tg} \left(-\frac{x}{4} - 1\right) = \sqrt{3}.$

2.34.  $\sin(2x - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2.35.  $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$

2.36.  $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$

2.37.  $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

2.38.  $4 \operatorname{ctg}(2x - \pi) = \frac{1}{4}.$

2.39.  $\frac{1}{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{6}.$

2.40.  $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$

2.41.  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0.$

2.42.  $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 0.$

2.43.  $\sin 3x = \sin 4x.$

2.44.  $\sin x = \cos x.$

2.45.  $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 2x.$

2.46.  $2 \cos^2 x - \sin 2x = 0.$

2.47.  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 7x = 1.$

2.48.  $\cos^2 x = \cos x \cdot \sin 3x.$

2.49.  $\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = 0.$

2.50.  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0.$

Dla  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$  rozwiąż podane nierówności:

2.51.  $\sin x - \frac{1}{2} < 0.$

2.52.  $\sin 2x < \frac{1}{2}.$

2.53.  $\cos \frac{x}{5} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.54.  $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x < 0.$

2.55.  $\operatorname{tg} 2x > 1.$

2.56.  $\operatorname{tg}^2 x > 1.$

2.57.  $2 \sin(\pi - 2x) > -1.$

2.58.  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 < 0.$

2.59.  $3 \operatorname{tg}^2 x \leq 1.$

2.60.  $\sin x - \sqrt{3} \cos x > 1.$

2.61.  $\sin x \leq \cos x.$

2.62.  $2 \cdot \cos x > \sqrt{2}.$