

Funkcje cyklometryczne

Obliczyć:

3.1. $\arcsin \frac{1}{2}$;

3.2. $\arccos 1$;

3.3. $\arctg \sqrt{3}$;

3.4. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.5. $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

3.6. $\sin \left(\arctg \sqrt{3}\right)$;

3.7. $\cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3.8. $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3.9. $\operatorname{ctg} \left(\arctg \sqrt{3}\right)$;

3.10. $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos 0\right)$.

Znaleźć dziedzinę funkcji:

3.11. $y = \arcsin \frac{2}{x}$;

3.12. $y = \arctg(x + 2)$;

3.13. $y = \arccos 2x$;

3.14. $y = \arcsin \frac{x + 2}{4}$;

3.15. $y = \arctg \frac{x}{2}$;

3.16. $y = \log \arcsin(2 - x^2)$.

Sporządzić wykres funkcji:

3.17. $y = 2 \arcsin \frac{x}{2}$;

3.18. $y = \frac{\pi}{2} + \arctg 2x$;

3.19. $y = 2 \arccos 2x$;

3.20. $y = \arcsin \frac{1 - x}{4}$;

Sprawdzić tożsamość:

3.21. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ na przedziale $[-1, 1]$;

3.22. $\arctg x + \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}$ na zbiorze \mathbb{R} .

Obliczyć:

3.23. $\sqrt{1 - x^2} - \cos(\arcsin x)$ dla $x \in [-1, 1]$;

3.24. $\operatorname{ctg}(\arctg x) + \frac{x - 1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Rachunek zbiorów i działania na liczbach rzeczywistych.

3.25. Dane są zbiory $A = \{-3, -2, 0, 2, 5, 7\}$, $B = \{-1, 1, 2, 5\}$, $C = \langle -5, 5 \rangle$.

Wyznacz zbiory:

- (a) $A \cup B$, (c) $A \cap C$, (e) $A \setminus C$, (g) $(A \cup B) \cap C$,
 (b) $A \cap B$, (d) $B \cup C$, (f) $C \setminus (A \cap B)$, (h) $(A \cap B) \cap C$.

3.26. Przestrzenią jest \mathbb{R} . Dane są przedziały $A = \langle 2, 4 \rangle$ i $B = \langle 3, 5 \rangle$. Wyznacz zbiory

- (a) $(A \cup B)'$, (c) $A' \cap B'$, (e) $A' \cap B'$, (g) $A' \setminus B$,
 (b) $A' \cap B'$, (d) $(A \cap B)'$, (f) $A' \setminus B$, (h) $A' \setminus B$.

3.27. Wiadomo, że $A \subset B$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

3.28. Wyznacz $A \times B$, $A \times C$, $C \times D$, $C \times E$, jeśli $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $C = \langle -1, 1 \rangle$,

$D = \langle -2, +\infty \rangle$ i $E = \langle 0, 2 \rangle$. Przedstaw graficznie zbiory $A \times C$, $C \times D$ i $C \times E$.

3.29. Które z następujących liczb są niewymierne: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $4\sqrt{9}$, $1 + \sqrt{2}$, 3 , 14 ?

Oblicz

3.30. $43\frac{1}{3} - 4560 \left(\frac{0,012}{5} + \frac{0,04104}{5,4} \right)$. 3.31. $\left(\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2} \right) \cdot \left(4\frac{1}{5} - 1\frac{3}{40} \right) + 1,35 : 2,7$.

3.32. $13 : \left[\frac{3 : (0,2 - 0,1)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,06 - 33,81) \cdot 4}{6,84 : (28,57 - 25,15)} \right] + \frac{2}{3} : \frac{2}{21}$.

3.33. Porównaj liczby:

(a) $12\frac{1}{22} - 2\frac{1}{2}$ oraz $14\frac{1}{44} - 4\frac{1}{4}$, (b) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$ oraz $\sqrt[3]{1024}$.

Oblicz (usuń niewymierność z mianownika i wykonaj działania):

3.34. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

3.37. $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + 2 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

3.35. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$.

3.38. $\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{80} - 2\sqrt{125} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$.

3.36. $\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2} - \frac{1 - 16\sqrt{6}}{4}$.

3.39. $\frac{\sqrt{11} + 1}{11\sqrt{11} + 11 + \sqrt{11}} : \frac{1}{121 - \sqrt{11}}$.

Działania na potęgach oraz wyrażeniach algebraicznych

Oblicz:

3.40.
$$\frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}.$$

3.41.
$$\frac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(13 \cdot 8^4)^2}.$$

3.42.
$$\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^{-2} \right]^{-3}.$$

3.43.
$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3} \right]^{-2}.$$

3.44.
$$\frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}}{16^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}.$$

3.45.
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{5}}}{\left(675^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{0,3}\right)^{-2}}.$$

3.46.
$$\left[4 \cdot (0,5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}.$$

3.47.
$$(0,5)^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot (0,25)^{\sqrt{2}}.$$

3.48. Oblicz wartość wyrażenia $\left[1 - \frac{1 - (4 + x^2)}{4x}\right] \cdot \frac{1 + (2 + x)^{-1}}{1 - (2 + x)^{-1}}$ dla $x = \sqrt{3}$.

Wykonaj wskazane działania:

3.49.
$$16x^2y^3 : \left(-\frac{20x^5y^4}{3a^2b}\right).$$

3.50.
$$\left(\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3}\right) \cdot \frac{28a^4}{3b^2}.$$

3.51.
$$\frac{ax + ay}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x + 2y}{ax^2 + 2axy + ay^2}.$$

3.52.
$$\frac{2a^3 - 2b^3}{3a + 3b} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{6a^2 - 6b^2}.$$

Doprowadź do możliwie najprostszej postaci wyrażenia:

3.53.
$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{x + y}{2x - 2y} + 1.$$

3.54.
$$\frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1} + \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

3.55.
$$\left(\frac{(\sqrt{a} + 1)^3 - a\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 1)^2 - \frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} \right)^{-1}.$$

3.56.
$$\frac{n + 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{n + 2 - \sqrt{n^2 - 4}} + \frac{n + 2 - \sqrt{n^2 - 4}}{n + 2 + \sqrt{n^2 - 4}}.$$