Lista IV.

Wzory skróconego mnożenia. Dwumian Newtona.

4.1. Napisz rozwinięcie potęgi:

a) $(x-y)^4$ b) $(x+y)^5$ c) $(\sqrt{x}-1)^6$ d) $(x-3y)^5$.

4.2. Napisz trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia potęgi

a) $(1+x)^{14}$ b)$(1+\frac{x}{5})^5$.

4.3. W rozwinięciu dwumianu $(x+1)^n$, gdzie $n>5$, współczynnik przy x^6 jest równy współczynnikowi przy x^{14}. Znajdź n.

4.4. Wyznacz ten współczynnik rozwinięcia dwumianu $(x^8+\frac{1}{x^4})^{12}$, który występuje przy x^{60}.

4.5. Znajdź ten wyraz dwumianu $(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x})^{12}$, w którym nie występuje x.

4.6. Oblicz:

a) $\frac{9!}{8!}$, b) $\frac{8!}{3!8!}$, c) $\frac{6!}{0!}$, d) $\binom{20}{2}$.

4.7. Rozwiąż równania:

a) $\binom{n}{2}=10$, b) $\binom{n}{3}=4$, c) $\binom{n}{4}=45$, a) $\binom{n}{n-2}=45$.

4.8. Wyznacz środkowy wyraz potęgi $(a+b)^{12}$.

4.9. Rozwiąż $(x^2-1)^3-(x-1)(x^2+1)(x+1)+4x^2(x^2+1)$

4.10. Rozwiąż podane równanie i sprawdź otrzymane rozwiązanie

$(2x–4)^2-(2x–3)(2x+3)=-11$.

4.11. Zapisz w postaci sumy (różnicy) poniższe wyrażenia a) $(2x+1)^2$

b) $(2x-3)(2x+3)$ c) $(x+\frac{1}{2})^3$ d) $(\frac{k}{2}-\frac{m}{3})^2$. e) $(-a-b)(-a+b)$.

4.12. Zapisz w „prostszej” postaci: a) $(x+5)^2-x(x+5)$, b) $(x-2)^3-(x-2)^2-(x-2)$, c) $2(t-4)(t+4)-(2t+3)2$, d) $(x+y)^3-(x-y)^3$, e) $[(p+2q)^3-(2p-q)^3]-6pq(3p+q)$,

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

f) $[(a-2b)(a+2b)]^3$.

Doprowadź do możliwie najprostszej postaci wyrażenia:

4.13. $\dfrac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

4.14. $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$.

4.15. $\dfrac{ab+bc+ac+c^2}{ab-ac-bc+c^2}:\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$.

4.16. $\dfrac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{2x+2y}{ax^2+2axy+ay^2}$.

4.17. $\left(\dfrac{3(x-y)}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{1}{6}}y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot x^{\frac{1}{6}}$.

4.18. $\left(\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

4.19. $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right):\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

4.20. $\left(\dfrac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\dfrac{2a^2}{b^3-ab^2+ab^2-a^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{b-1}{a}-\dfrac{b}{a^2}\right)$.

4.21. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$, $\quad n\in\mathbb{N}$.

4.22. $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\dfrac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right):\dfrac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}$.

4.23. $\left(\sqrt{a}+\dfrac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right):\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right)$.

4.24. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

4.25. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

4.26. $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right)$.

4.27. $\left(\dfrac{(a+b)^{-\frac{n}{4}}\cdot c^{\frac{1}{2}}}{a^{2-n}b^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\quad a=\frac{19}{31}$, $b=0,04$, $c=6\frac{8}{15}$.

Funkcja liniowa. Wartość bezwzględna liczby. Równania i nierówności z warością bezwzgledną.

4.28. Do wykresu funkcji $y = ax + b$ należą punkty A i B. Sprawdź rachunkowo, czy punkt C również należy do wykresu jeśli:

a) $A = (1, 2)$ $B = (-1, 4)$ $C = (2, 6)$, b) $A = (2, 1)$ $B = (4, 0)$ $C = (3, \frac{1}{2})$.

4.29. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt A i jest nachylony do osi x pod kątem α. Napisz wzór tej funkcji jeżeli:

a) $A = (1, 5)$ $\alpha = 120°$, b) $A = (-1, -1)$ $\alpha = 60°$.

4.30. Wykresy wszystkich funkcji postaci $y = mx$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{R}$ tworzą rodzinę prostych. Naszkicuj kilka z tych wykresów. Zacieniuj część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy, gdy:

a) $0 < m < 1$, b) $m > 10$, c) $-1 < m < 0$,

d) $m < -1$, e) $m > 2$, f) $-3 < m < -\frac{1}{2}$.

4.31. Rozwiąż zadanie 8.3 dla funkcji postaci $y = mx + 2$.

4.32. Rozwiąż zadanie 8.3 dla funkcji postaci $y = 2x + m$ i m spełniającego warunki:

a) $1 < m < 3$, b) $-1 < m < 0$, c) $m < -3$.

4.33. Wyznacz punkty przecięcia się wykresów podanych funkcji z osiami układu współrzędnych:

a) $y = -2x + 6$, b) $y = -\frac{1}{3}x + 10$, c) $y = 3$.

4.34. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = |x|$, b) $y = |x| + 1$, c) $y = |x - 1| + 1$,

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

d) $y = |-x|$, e) $y = 2|x|$, f) $y = x - |x|$,

g) $y = x + \sqrt{x^2}$, h) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 3$, i) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

4.35. Uzupełnij podaną tabelkę:

Znaki liczb a, b	Numery ćwiartek, przez które przechodzi wykres funkcji $y = ax + b$
$a > 0$ i $b > 0$	
$a > 0$ i $b < 0$	
$a > 0$ i $b = 0$	
$a < 0$ i $b > 0$	
$a < 0$ i $b < 0$	
$a < 0$ i $b = 0$	
$a = 0$ i $b > 0$	
$a = 0$ i $b < 0$	

4.36. Napisz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych:

a) równoległej do prostej $y = -2x + 3$,

b) prostopadłej do prostej $y = \frac{1}{2}x - 5$,

c) tworzącej z prostą $y = 2$ kąt o mierze $\frac{\pi}{4}$,

d) tworzącej z prostą $x = 2$ kąt o mierze $\frac{\pi}{6}$.

4.37. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x < -4 \\ x & \text{dla } -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ -5 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+16}{3} & \text{dla } x < -1 \\ 2 - 3x & \text{dla } -1 \leqslant x < 2 \\ \frac{x-14}{3} & \text{dla } x \geqslant 4 \end{cases}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.38. Rozwiąż nierówności:

a) $3x - [7 - (5 - 4x)] - (x - 8) \geqslant 0$, b) $(4x + 1)^2 + (3x + 2)^2 < (5x + 2)^2$.

4.39. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $|x + 2| = 2(3 - x)$, b) $|3x - 2| + x = 11$, c) $|x| - |x - 2| = 2$,

d) $|5 - 2x| < 1$, e) $|3x - 2{,}5| \geqslant 2$, f) $|x - 2| \leqslant |x + 4|$,

g) $|x - 3| + |x + 4| = 9$, h) $|x + 3| + |x - 1| < 5$, i) $|x + 2| - |x| > 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego