

## Lista VII.

Rozkład na ułamki proste. Równania i nierówności wymierne.

Podaj rozkłady na ułamki proste wskazanych funkcji wymiernych właściwych:

$$7.1. \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$$

$$7.5. \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

$$7.2. \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

$$7.6. \frac{x}{(x^2 + 2)^2}.$$

$$7.3. \frac{2x + 4}{x^3 - 2x^2}.$$

$$7.7. \frac{x}{1 - x^4}.$$

$$7.4. \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2}.$$

$$7.8. \frac{1}{x^8 + x^6}.$$

Rozwiąż podane równania i nierówności wymierne oraz podaj ich ilustrację graficzną:

$$7.9. \frac{1}{x} = x.$$

$$7.10. \frac{1}{x} = -3x.$$

$$7.11. \frac{3}{x} \leq 2 + x.$$

$$7.12. \frac{1}{x} \geq x^2.$$

Rozwiąż podane równania i nierówności wymierne:

$$7.13. \frac{x(x-5)}{1-x} \geq 0.$$

$$7.14. \frac{2}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6x}.$$

$$7.15. \frac{x^2(2x+7)}{1-2x} \geq 0.$$

$$7.16. \frac{(2+x)^2}{x-x^2} \leq 0.$$

$$7.17. \frac{9x-x^3}{x^3} \geq 0.$$

$$7.18. \frac{(x-2)^2 \cdot (2x+1)^3}{(x^2-1)} \leq 0.$$

$$7.19. x^2 - \frac{1}{x^3} > x - \frac{1}{x^2}.$$

$$7.20. 1 < \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} < 2.$$

$$7.21. \frac{x^4 - 16}{x^2 + 1} > 0.$$

$$7.22. \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x + 1} \leq 0.$$

$$7.23. \frac{(1-x)(x+2)}{(2x+3)^2} \geq 0.$$

$$7.24. \frac{2(x+3)(x-2)^2}{(x-1)^3} \leq 0.$$

7.25.  $\frac{x^2 - 3,5x + 1,5}{x^2 - x - 6} = 0.$

7.26.  $\frac{2x - 2}{x^2 - 36} - \frac{x - 2}{x^2 - 6x} = \frac{x - 1}{x^2 + 6x}.$

7.27.  $\frac{12}{1 - 9x^2} = \frac{1 - 3x}{1 + 3x} + \frac{1 + 3x}{3x - 1}.$

7.28.  $\frac{2x - 3}{x - 1} + 1 = \frac{6x - x^2 - 6}{x - 1}.$

7.29.  $\frac{(x - 1)(x + 2)^2}{-1 - x} < 0.$

7.30.  $\frac{x - 2}{x + 1} < -\frac{1}{2}$

7.31.  $\frac{x - 1}{x + 1} < x.$

7.32.  $\frac{(2 - x^2)(x - 3)^3}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} \geq 0.$

7.33.  $\left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| > 2.$

7.34.  $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$

7.35.  $\frac{|x - 2|}{x - 2} > 0.$

7.36.  $\frac{|x + 3| + x}{x + 2} > 1.$

7.37. Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ . Rozwiąż równanie  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1$ .

7.38. Rozwiąż równanie  $\frac{2b^2 + x^2}{b^3 - x^3} - \frac{2x}{bx + b^2 + x^2} + \frac{1}{x - b} = 0$ . Przy jakiej wartości parametru  $b$  równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie?

7.39. Rozwiąż układ nierówności  $\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{16 - 5x^2} \leq 2 \\ \frac{x}{3 - x} > 0 \end{cases}.$

7.40. Rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} + \dots + \frac{1}{(x + 9)(x + 10)} < \frac{1}{x - 2}.$$

Wskazówka: zastosuj rozkład na ułamki proste, tzn.  $\frac{1}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}.$

7.41. Dla jakich wartości parametru  $a$  zbiorem rozwiązań nierówności  $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ?

7.42. Dla jakich wartości parametru  $m$  zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ?