

Lista VIII.

Funkcja wykładnicza. Równania i nierówności wykładnicze.

8.1. Narysować wykres funkcji:

(a) $y = 2^{x-1} + 2,$

(c) $y = 3^{|x|+2},$

(b) $y = -2^x + 1,$

(d) $y = |2^x - 2|.$

8.2. Rozwiąż równanie:

(a) $2^{x+1} = 4,$

(c) $3^{x+1} + 3^x = 36,$

(b) $(5\sqrt{5})^x = 0,04 \cdot 125^{x-2},$

(d) $2^x + 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} = 18.$

8.3. Rozwiąż równanie:

(a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0,$

(c) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0,$

(b) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0,$

(d) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

8.4. Dla jakich wartości parametru k równanie $5^x = 3 - k$ nie ma rozwiązań?8.5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie:

(a) $6^x = m - 5,$

(b) $9^x - 2 \cdot 3^x + m = 0.$

8.6. Rozwiąż równanie $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}+x} - 3^{2x-1}$

8.7. Rozwiąż nierówność:

(a) $2^{3x-5} > 0,$

(f) $(\frac{2}{3})^{x^2} > (\sqrt{\frac{3}{2}})^x,$

(b) $(\frac{2}{3})^x > \frac{4}{9},$

(g) $2^{2x+1} \geq 11 \cdot 2^x - 5,$

(c) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 < 0,$

(h) $\frac{1}{2^{x-1}} > \frac{1}{1-2^{x-1}},$

(d) $2^{-5x+3} < 4^{-\frac{1}{2}x^2},$

(i) $2^{4-|x^2-4x|} \geq 4,$

(e) $3^{x^2-9x+7} > 1,$

(j) $\frac{2^x+1-2^{1-x}}{1-2^{2-x}} \geq 0.$

8.8. Rozwiąż graficznie równanie $|3^x - 3| = -x^2 + 2x - 1.$

Logarytm i jego własności. Funkcja logarytmiczna.

8.9. Oblicz:

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------|--|---|
| (a) $\log_2 16$, | (e) $\log_{\frac{1}{3}} 9$, | (i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, | (m) $\log_{\sqrt{2}} 8$, |
| (b) $\log_2 \frac{1}{4}$, | (f) $\log_{27} 3$, | (j) $\log_{\frac{2}{3}} 2,25$, | (n) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$, |
| (c) $\log_3 27$, | (g) $\log_{25} 5$, | (k) $\log_{\sqrt{2}} 2$, | (o) $\log_6 1$, |
| (d) $\log_{10} 0,01$, | (h) $\log_{64} 16$, | (l) $\log_5 5\sqrt{5}$, | (p) $\log_{11} 11$. |

8.10. Znajdź liczbę x , jeżeli:

- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| (a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, | (c) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$, | (e) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$, | (g) $\log_9 x = \frac{1}{2}$, |
| (b) $\log_2 x = 5$, | (d) $\log_3 x = -3$, | (f) $\log_{0,01} x = -1$, | (h) $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$. |

8.11. Oblicz:

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| (a) $2^{\log_2 32}$, | (c) $4^{\log_4 3}$, | (e) $49^{\log_7 2}$, | (g) $2^{3-\log_2 3}$, |
| (b) $3^{\log_3 5}$, | (d) $10^{2+2\log 7}$, | (f) $16^{\log_2 3}$, | (h) $8^{1-\log_2 3}$. |

8.12. Wyznacz dziedzinę funkcji ($p > 0, p \neq 1$):

- | | | |
|--|--|----------------------------------|
| (a) $y = \log_p(2x + 1)$, | (d) $y = \log_p(x^2)$, | (g) $y = \log_p(x^2 - 1)$, |
| (b) $y = \log_p(1 - x)$, | (e) $y = \log_p(x^2 + 1)$, | (h) $y = \log_p(x^2 + 2x + 3)$, |
| (c) $y = \log_p(-x)$, | (f) $y = \log_p x $, | (i) $y = \log_p(x - 3)$. |
| (m) $y = \log_2[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)]$, | (n) $y = \sqrt{\log_{0,1}(2x - 1) - \log_{0,1}(5 - 3x)}$. | |

8.13. Naszkicuj wykresy funkcji:

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| (a) $y = \log_2 x $, | (d) $y = \log_2(x^2)$, | (g) $y = \log_3(1 - x)$, |
| (b) $y = \log_2 x $, | (e) $y = 2 + \log_2 x$, | (h) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$, |
| (c) $y = \log_2(x - 2)$, | (f) $y = \log_3(-x)$, | (i) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$. |

Dla każdej z tych funkcji podaj: dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

8.14. Rozwiąż graficznie równanie:



$$(a) \log_2 x = -2x, \quad (b) \log_2 x = -x^2 + 1, \quad (c) \log_{\frac{1}{2}} x = -x^3 + 3.$$

8.15. Wyznacz najmniejszy z przedziałów $(a; b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, do którego należy liczba:

$$\begin{array}{llll} (a) \log_2 3, & (d) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}, & (g) \log_7 \frac{5}{6}, & (j) \log_8 7, \\ (b) \log_3 2, & (e) \log_{\frac{1}{2}} 5, & (h) \log_{\frac{3}{4}} 2, & (k) \log_{0,1} 15, \\ (c) \log_4 9, & (f) \log \frac{3}{4}, & (i) \log_5 10, & (l) \log_{\sqrt{2}} 12. \end{array}$$

8.16. Oblicz bez użycia tablic:

$$\begin{array}{ll} (a) \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36, & (c) \log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2, \\ (b) \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81, & (d) \log_9 5 \cdot \log_{25} 27. \end{array}$$