

Zadania przygotowujące do Sprawdzianu II.

- 1.1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \dots$, gdzie prawa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego. Znajdź dziedzinę tej funkcji.
- 1.2. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 7, a ich iloczyn jest równy 8. Wyznacz ten ciąg.
- 1.3. Dany jest skończony i uporządkowany zbiór kwadratów, których pola powierzchni tworzą ciąg arytmetyczny. Pole powierzchni pierwszego z nich jest równe 12 cm^2 , a piątego 30 cm^2 . Ile jest kwadratów, jeśli suma ich pól równa się polu kwadratu o boku 21 cm.
- 1.4. Oblicz pole koła określonego nierównością $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0$.
- 1.5. Zilustruj w układzie współrzędnych zbiór $A \cap B$, jeśli $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge 9 \leq x^2 + y^2 < 16\}$,
 $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y \geq |x|\}$.
- 1.6. Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$.
- 1.7. Wielomian $Q(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$ rozłóż na czynniki i podaj jego pierwiastki.
- 1.8. Rozwiąż nierówność $\frac{2}{x-1} < \frac{3}{x}$.
- 1.9. Rozwiąż równanie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 4x$, gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.
- 1.10. Dla jakich x szereg geometryczny $1 + \frac{3}{x-2} + \frac{9}{(x-2)^2} + \dots$ jest zbieżny?
- 1.11. Uprość zapis wyrażenia $\frac{\log \sqrt{2}}{2 \log 4 - \log 8}$.
- 1.12. Rozwiąż równanie $9^x - 2 \cdot 3^{x-1} - 7 = 0$.
- 1.13. Oblicz $\log_3 \left(\frac{1}{9} \sqrt{3}\right)$.
- 1.14. Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} > 9^x$.
- 1.15. Uprość wyrażenie $\frac{4^3 \cdot 8 \cdot \sqrt{2}}{16^{\frac{17}{8}}}$.
- 1.16. Rozwiąż nierówność $3 \cdot 9^x < \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \left(\frac{1}{3^x}\right)^2$.
- 1.17. Oblicz sumę ciągu arytmetycznego skończonego $3 + 7 + 11 + \dots + 95 + 99$.
- 1.18. Przedstaw liczbę 0, (23) w postaci ułamka zwykłego.
- 1.19. Podaj rozkłady na ułamki proste funkcji wymiernej właściwej: $\frac{x^2 + x}{x^6 + x^4}$.
- 1.20. Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$.

- 1.21. Wyznacz największą liczbę ujemną spełniającą nierówność $(5 - x)(x^2 + 6x + 8) \leq 0$.
- 1.22. Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego wiedząc, że jego suma wynosi 9, a drugi wyraz jest równy 2.
- 1.23. Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Obwód tego trójkąta wyraża się liczbą $3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Oblicz długości jego boków.
- 1.24. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| - 2}$ i podaj liczbę rozwiązań równania $\frac{|x| - 1}{|x| - 2} = m$ w zależności od wartości parametru m .
- 1.25. Funkcję wymierną niewłaściwą przedstaw w postaci sumy wielomianu i funkcji $\frac{x^5 + 7x + 1}{x^3 + x}$.
- 1.26. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = 9^{\log_3 x}$.
- 1.27. Rozwiąż nierówność $\log_2 \sin x < -1$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- 1.28. Rozwiązać równanie $\log^2 x + \log x = 0$.
- 1.29. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ ciąg $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym?
- 1.30. Liczbę $2,0(36)$ zamień na ułamek zwykły.
- 1.31. Prosta o równaniu $x + y = r$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r$, $r > 0$. Oblicz wartość r .
- 1.32. Zbadaj wzajemne położenie okręgów o równaniach $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ i $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$.
- 1.33. Podaj rozkłady na ułamki proste funkcji wymiernej właściwej: $\frac{x + 7}{x^5 + 4x^3 + 4x}$.
- 1.34. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB , gdzie $A(-1, 3)$, $B(1, -1)$.
- 1.35. Rozwiąż równanie $\log_5(\log_3(\log_2 x)) = 0$.
- 1.36. Rozwiąż nierówność $\log_4(x - 1) < 1 - \log_4(x + 2)$.
- 1.37. Rozwiąż równanie $\log^2 x = 6 + \log x$.
- 1.38. Funkcję wymierną niewłaściwą $\frac{x^3 + 2}{x - 1}$ przedstaw w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
- 1.39. Dla jakich wartości m prosta $y = m - x$ jest rozłączna z okręgiem $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
- 1.40. Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} \log_{0,5}(2x - 5) > 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$.