Lista IV.

Funkcja kwadratowa, funkcje wielomianowe, funkcja wymierna, funkcja homograficzna

1.1. Wykresy funkcji $y = x^2 + bx$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka parabol. Wyznacz parametr b tak, aby:

(a) do wykresu należał punkt $A(-1, 3)$,

(b) miejscem zerowym była liczba 4,

(c) funkcja miała tylko jedno miejsce zerowe.

Jaką figurę tworzą wszystkie wierzchołki parabol należących do rodziny?

1.2. Do wykresu funkcji $y = ax^2 + bx + c$ należą punkty A, B, C. Wyznacz a, b i c.

(a) $A(1, -4)$, $B(2, -3)$, $C(-1, 0)$,

(b) $A(-1, 6)$, $B(3, 6)$, $C(4, 11)$.

1.3. Oblicz współczynniki trójmianu $y = ax^2 + bx + c$, jeśli do jego wykresu należy punkt $A(3, 0)$ i $y_{max} = 12$ dla $x = 1$.

1.4. Wyznacz największą wartość funkcji w podanym przedziale:

(a) $y = -2x^2 + x - 1 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$,

(b) $y = -x^2 - 3x + 10 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$,

(c) $y = 2x^2 - x + 1 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$,

(d) $y = x - x^2 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$.

1.5. Narysuj wykres funkcji o podanym wzorze na wskazanym przedziale:

(a) $y = -2x^2 + x - 1 \quad x \in \langle 0; 2\rangle$,

(b) $y = |x^2 + 3x - 10| \quad x \in \langle 0; 2\rangle$,

(c) $y = 2x(x - 1) \quad x \in \langle -1; 2\rangle$,

(d) $y = |3x^2 - x + 3| \quad x \in \langle -2; 2\rangle$.

1.6. Siatką drucianą długości 60 m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary winien mieć plac, aby jego pole było największe?

1.7. Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 30 cm i 50 cm należy wyciąc w rogach kwadraty tak, aby po złożeniu otrzymać otwarte pudełko. Jak dobrać długość boku kwadratu, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe?

1.8. Wyróżniki podanych trójmianów są dodatnie. Oblicz sumę i iloczyn miejsc zerowych każdego z trójmianów (bez obliczania miejsc zerowych):

(a) $y = x^2 - 8x + 12$,

(b) $y = 2x^2 - 3x - 1$,

(c) $y = -3x^2 + 5x + 2$,

(d) $y = 0,5x^2 - 4x - 3$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.9. Rozwiąż nierówności:

(**a**) $x^2 - 8x + 12 < 0$,

(**b**) $x^2 - 2x - 8 > 0$,

(**c**) $2x(x - 10) \geqslant 4(x - 8)$,

(**d**) $x(x + 19) \leqslant 3(18 + 5x)$.

Nie wykonując dzielenia, zbadaj czy wielomian W jest podzielny przez wielomian P, jeśli:

1.10. $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2,\ P(x) = x - 2$.

1.11. $W(x) = x^{20} + x^{15} - 2,\ P(x) = x + 1$.

Rozłóż na czynniki wielomian W wiedząc, że liczba p jest pierwiastkiem wielomianu W:

1.12. $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,\ p = 1$.

1.13. $W(x) = 4x^3 + 4x^2 + 3x - 3,\ p = 0{,}5$.

Rozłóż na czynniki wielomian W:

1.14. $W(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$.

1.15. $W(x) = 3x^3 + 13x^2 + 7x + 1$.

1.16. $W(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

1.17. $W(x) = x^4 + 5x^2 + 6$.

Rozwiąż równania:

1.18. $(3x + 2) \cdot \left(x^3 - 8\right) = 0$.

1.19. $\left(x^2 - 16\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) = 0$.

1.20. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.

1.21. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$.

Naszkicuj wykresy wielomianów o podanych wzorach W i w każdym przypadku podaj rozwiązanie nierówności $W(x) \leqslant 0$, a następnie nierówności $W(x) \geqslant 0$:

1.22. $W(x) = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$.

1.23. $W(x) = -4 \cdot (x - \sqrt{3})^2 \cdot (x + 1)^3 \cdot (x - 5)$.

1.24. $W(x) = 2 \cdot x^3 \cdot (2x + 1) \cdot (4 - x^2)$.

1.25. $W(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Rozwiąż nierówności:

1.26. $(x + 3) \cdot \left(x^2 - 9\right) > 0$.

1.27. $\left(1 - x^2\right) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 1)^2 \geqslant 0$.

1.28. $(6 - 3x)^3 \cdot (x - 4)^2 \leqslant 0$.

1.29. $\left(x^2 - 16\right)^2 \cdot (x + 2)^3 \cdot (2x + 1)^4 \geqslant 0$.

1.30. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > 0$.

1.31. $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \leqslant 0$.

1.32. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \dfrac{5x - 6}{2x - 3}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(a) Określ dziedzinę funkcji f.

(b) Znajdź miejsce zerowe funkcji f.

(c) Znajdź ten argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 3.

(d) Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OY.

(e) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe od 5.

1.33. Dane są funkcje $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$ i $g(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.

(a) Naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

(b) Określ przedziały monotoniczności obu funkcji.

(c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

1.34. Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{x+b}{x+d}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Funkcja f ma miejsce zerowe równe 4.

(a) Wyznacz współczynniki b i d.

(b) Określ zbiór wartości funkcji f i przedziały monotoniczności tej funkcji.

Rozwiąż podane równania i nierówności wymierne:

1.35. $\dfrac{x^2 - 3,5x + 1,5}{x^2 - x - 6} = 0.$

1.36. $\dfrac{2x-2}{x^2-36} - \dfrac{x-2}{x^2-6x} = \dfrac{x-1}{x^2+6x}.$

1.37. $\dfrac{12}{1-9x^2} = \dfrac{1-3x}{1+3x} + \dfrac{1+3x}{3x-1}.$

1.38. $\dfrac{2x-3}{x-1} + 1 = \dfrac{6x-x^2-6}{x-1}.$

1.39. $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-1-x} < 0.$

1.40. $\dfrac{x-2}{x+1} < -\dfrac{1}{2}$

1.41. $\dfrac{x-1}{x+1} < x.$

1.42. $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geqslant 0.$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego