

## Lista VI.

## Funkcje trygonometryczne

6.1. Dla jakich  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$  prawdziwe są następujące nierówności:

(a)  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ ;                      (b)  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ;                      (c)  $\sin \alpha > \cos \alpha$ ;

(d)  $\operatorname{ctg} \alpha < \sqrt{3}$ ;                      (e)  $\cos \alpha < \frac{1}{2}$ ;                      (f)  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{ctg} \alpha$  ?

6.2. Zbadaj, która z liczb w każdej z podanych par jest większa. Wstaw w miejsce „...” znak „=”, „<” lub „>”:

(a)  $\sin 1 \dots \operatorname{tg} 1$ ;                      (b)  $\cos 1 \dots \operatorname{ctg} 1$ ;                      (c)  $\sin 2 \dots \cos 2$ ;

6.3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , jeżeli:

(a)  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;                      (b)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  i  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ;

(c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ;                      (d)  $\sin \alpha = -\sqrt{0,2}$  i  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ .

6.4. Oblicz  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  i  $\operatorname{tg} \alpha$ , gdy  $\operatorname{ctg} \alpha = m$  i  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

6.5. Określ zbiór wartości funkcji:

(a)  $y = 1 + \sin \alpha$ ;                      (b)  $y = 3 - \cos 2\alpha$ ;                      (c)  $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ;

(d)  $y = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ ;                      (e)  $y = 1 - \sin^2 \alpha$ ;                      (f)  $y = 2 - 3 \cos^2 \alpha$ .

Narysować wykres funkcji:

6.1.  $y = \sin 2x$ .

6.2.  $y = \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

6.3.  $y = 2 - \sin x$ .

6.4.  $y = \cos x - 1$ .

6.5.  $y = 2 \sin \frac{x}{2} - 1$ .

6.6.  $y = 1 - \frac{1}{2} \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right)$ .

Zbadać, które z podanych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

6.7.  $y = \sin 3x$ .

6.8.  $y = \sin^2 x$ .

6.9.  $y = x \cos x$ .

6.10.  $y = \sin x \cos x$ .

6.11.  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

6.12.  $y = \frac{3 \sin x}{1 + 2 \sin^2 x}$ .

Wyznaczyć okres podstawowy funkcji:

6.13.  $y = \cos \frac{x}{2}$ .

6.14.  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ .

6.15.  $y = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$ .

$$6.16. y = 1 + 2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right). \quad 6.17. y = 1 - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \quad 6.18. y = \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{5} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{5}.$$

Udowodnić, że:

$$6.19. \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ - 4 \cos 20^\circ = 1. \quad 6.20. \cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ.$$

$$6.21. \sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2 \sin 203^\circ \cdot (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0.$$

Sprawdź następujące tożsamości:

$$6.22. (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x. \quad 6.23. (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

$$6.24. (1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x) = \sin^2 x. \quad 6.25. \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x.$$

$$6.26. \frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x. \quad 6.27. 1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}.$$

$$6.28. \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x. \quad 6.29. \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Rozwiąż podane równania:

$$6.30. \sin 2x = 1. \quad 6.31. \sin 3x = 0. \quad 6.32. \operatorname{tg} 3x = -1$$

$$6.33. \cos 3x = -\frac{1}{2}. \quad 6.34. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1. \quad 6.35. \operatorname{tg} \left(-\frac{x}{4} - 1\right) = \sqrt{3}.$$

$$6.36. \sin(2x - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 6.37. \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \quad 6.38. \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$6.39. \operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 6.40. 4 \operatorname{ctg}(2x - \pi) = \frac{1}{4}. \quad 6.41. \frac{1}{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Dla  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$  rozwiąż podane nierówności:

$$6.42. \sin x - \frac{1}{2} < 0. \quad 6.43. \sin 2x < \frac{1}{2}. \quad 6.44. \cos \frac{x}{5} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$6.45. \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x < 0. \quad 6.46. \operatorname{tg} 2x > 1. \quad 6.47. \operatorname{tg}^2 x > 1.$$

$$6.48. 2 \sin(\pi - 2x) > -1. \quad 6.49. \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 < 0. \quad 6.50. 3 \operatorname{tg}^2 x \leq 1.$$