

Lista IX.

Równania i nierówności logarytmiczne.

9.1. Rozwiąż równania:

- (a) $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$, (g) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$,
(b) $3^{\log x} = \frac{1}{27}$, (h) $\log(x - 5) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(3x - 20)$,
(c) $\log(3x + 3) + \log(x + 8) = 2$, (i) $\log(2x + 14) + \log(x + 12) = 3$,
(d) $\log(3x - 91) - \log(30 - x) = 1$. (j) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$,
(e) $\frac{2\log x}{\log(5x-4)} = 1$, (k) $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$,
(f) $2\log x + \log(6 - x^2) = 0$, (l) $\log|2x - 3| - \log|3x - 2| = 1$.

9.2. Rozwiąż nierówności:

- (a) $\log_2(x + 1) > 3$, (f) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$,
(b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 5) < -4$, (g) $2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 9\log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0$,
(c) $\log_3(x^2 + 2) > 3$, (h) $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1 - \log x} > 1$,
(d) $\log_{\frac{1}{4}}|x - 3| < -2$, (i) $|3\log x - 1| < 2$,
(e) $\log_x 4 < 2$, (j) $\log_{(2x-3)} x > 1$.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny oraz ich własności.

9.3. Napisać trzy pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego, którego n -ty wyraz dany jest wzorem

a) $a_n = \frac{3n-1}{6}$ b) $a_n = \frac{5n+7}{3}$ c) $a_n = \frac{8n-3}{5}$.

9.4. Wiadomo, że $a_1 = 3$ i $r = 2$. Oblicz a_{2008} .

9.5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

9.6. Oblicz sumę dwustu początkowych liczb nieparzystych.

9.7. Oblicz sumę wszystkich 60 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3, poczynając od liczby 12.

9.8. Koszt robót przy drążeniu studni przedstawia się następująco: pierwszy metr głębokości kosztuje a zł, a każdy następny o b zł drożej niż poprzedni. Obliczyć koszt budowy studni o głębokości 40 m.

- 9.9.** Wiadomo, że $a_3 = 7$, zaś $a_6 = 13$. Obliczyć a_1 i a_5 wiedząc, że ciąg jest ciągiem arytmetycznym.
- 9.10.** Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 37, zaś wyraz jedenasty wynosi 52. Oblicz wyraz dwudziesty.
- 9.11.** Między liczby 28 i 52 wstawić dwie liczby x i y takie, aby ciąg $(28, x, y, 52)$ był ciągiem arytmetycznym.
- 9.12.** Trzy początkowe wyrazy malejącego ciągu arytmetycznego są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$, a jednym z nich jest $\sqrt{2}$.
- Znajdź pierwszy wyraz ciągu.
 - Oblicz sumę $a_{50} + a_{51} + \dots + a_{100}$.
- 9.13.** Liczby $2x^3 - 5x$, $x^2 + x$, $3x + 4$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych.
- Oblicz x .
 - Podaj wzór na n -ty wyraz ciągu.
- 9.14.** Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Przeciwprostokątna wynosi 30 cm. Oblicz długości przyprostokątnych.
- 9.15.** Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli suma jego n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 + 4n$.
- 9.16.** Wiadomo, że pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wynosi 2, zaś iloraz jest równy 3. Oblicz piąty i siódmy wyraz tego ciągu.
- 9.17.** Ciąg $36, 12\sqrt{6}, 24, \dots$ jest ciągiem geometrycznym.
- Oblicz iloraz tego ciągu.
 - Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
- 9.18.** Basen ma kształt prostopadłościanu. Długości krawędzi tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3. Objętość basenu wynosi 729 m^3 . Obliczyć długość krawędzi basenu.
- 9.19.** Między liczby 32 i 500 wstawić liczby x i y tak dobrane, aby ciąg $(32, x, y, 500)$ był ciągiem geometrycznym.
- 9.20.** Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od pierwszej z nich odejmiemy 2, od drugiej

3, od trzeciej 9, a od czwartej 25, to otrzymane różnice utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

9.21. Dla jakich wartości x, y liczby $x + y, x^2, y + 2$ są trzema kolejnymi wyrazami zarówno ciągu arytmetycznego jak i geometrycznego.

Szereg geometryczny.

Oblicz sumy podanych szeregów:

9.22. $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots$

9.24. $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$

9.23. $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} + \dots$

9.25. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$

Zamień na ułamki zwykłe:

9.26. $2,(7).$

9.27. $0,5(45).$

9.28. $2,(21).$

9.29. $5,(002).$

9.30. Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Uzupełnij brakujące dane w każdej kolumnie tabelki:

a_1					$\frac{1}{2}$	9	70	-17
q	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{4}{5}$				
S	-1,7	18	2	-10	$\frac{3}{2}$	13,5	56	$-36\frac{2}{3}$

9.31. Znajdź iloraz zbieżnego ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 2$, a suma wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.

9.32. Dla jakich wartości a szereg geometryczny o ilorazie $q = a^2 - 3a + 1$ jest zbieżny?

9.33. Rozwiąż równanie $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots = \frac{3x + 1}{3}$, gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

9.34. W dany kwadrat K_1 o boku jednostkowym wpisano kwadrat K_2 , tak że każdy wierzchołek kwadratu K_2 należy do innego boku kwadratu K_1 , a kąt między bokami kwadratów K_1 i K_2 wynosi $\frac{\pi}{6}$. W kwadrat K_2 wpisano analogicznie kwadrat K_3 itd. Oblicz sumę nieskończonego ciągu pól wszystkich utworzonych w ten sposób kwadratów.