Lista VI.

Funkcje logarytmiczne, równania i nierówności logarytmiczne

6.1. Oblicz:

(a) $\log_2 16$, **(d)** $\log_{10} 0{,}01$, **(f)** $\log_{27} 3$, **(h)** $\log_{\sqrt{2}} 2$,
(b) $\log_2 \frac{1}{4}$, **(e)** $\log_{\frac{1}{3}} 9$, **(g)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, **(i)** $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$.

6.2. Znajdź liczbę x, jeżeli:

(a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, **(c)** $\log_{\sqrt{2}} x = 4$, **(e)** $\log_x 64 = 3$, **(g)** $\log_x \frac{1}{81} = 4$,
(b) $\log_2 x = 5$, **(d)** $\log_3 x = -3$, **(f)** $\log_x 8 = \frac{1}{2}$, **(h)** $\log_x 4 = -2$.

6.3. Oblicz:

(a) $2^{\log_2 32}$, **(b)** $3^{\log_3 5}$, **(c)** $2^{3-\log_2 3}$, **(d)** $8^{1-\log_2 3}$.

6.4. Wyznacz dziedzinę funkcji ($p > 0$, $p \neq 1$):

(a) $y = \log_p(2x+1)$, **(b)** $y = \log_p(x^2-1)$, **(c)** $y = \log_p \frac{x+3}{2-x}$,

6.5. Naszkicuj wykresy funkcji:

(a) $y = \log_2 |x|$, **(d)** $y = \log_2(x^2)$, **(g)** $y = \log_3(1-x)$,
(b) $y = |\log_2 x|$, **(e)** $y = 2 + \log_2 x$, **(h)** $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$,
(c) $y = \log_2(x-2)$, **(f)** $y = \log_3(-x)$, **(i)** $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$.

Dla każdej z tych funkcji podaj: dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

6.6. Rozwiąż graficznie równanie:

(a) $\log_2 x = -2x$, **(b)** $\log_2 x = -x^2 + 1$, **(c)** $\log_{\frac{1}{2}} x = -x^3 + 3$.

6.7. Korzystając z definicji logarytmu rozwiąż równanie:

(a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$, **(c)** $\log_7[\log_4(\log_3^2 x)] = 0$,
(b) $\log_2[\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$, **(d)** $\log_{(x-2)} 9 = 2$.

6.8. Rozwiąż nierówności:

(a) $\log_2(x+1) > 3$, **(c)** $\log_3(x^2+2) > 3$,
(b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) < -4$, **(d)** $\log_{\frac{1}{4}} |x-3| < -2$.

6.9. Rozwiąż równania:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(a) $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$, **(c)** $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$,

(b) $3^{\log x} = \frac{1}{27}$, **(d)** $\log(x-5) - \log 2 = \frac{1}{2}\log(3x-20)$.

Miara łukowa kąta, definicje i wykresy funkcji trygonometrycznych

6.10. Wyraź w stopniach:
(a) $\frac{1}{6}\pi$ rad, **(b)** $\frac{1}{3}\pi$ rad, **(c)** $\frac{3}{4}\pi$ rad, **(d)** $\frac{1}{12}\pi$ rad, **(e)** $\frac{7}{12}\pi$ rad, **(f)** $\frac{8}{9}\pi$ rad.

6.11. Wyraź w radianach $10°$, $45°$, $222°$. Wyraź $1°$ w radianach. Wyraź 1 rad w stopnich i cześciach stopnia oraz w stopniach i minutach.

6.12. Niech $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $\sphericalangle A = \alpha$ i $\sphericalangle B = \beta$. Wyznacz długości boków i kąty w trójkącie prostokątnym ABC, gdy $\sphericalangle C = 90°$ oraz
(a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, **(b)** $a = 8$ cm, $\alpha = 32°10'$, **(c)** $a = 17$ cm, $\beta = 43°$.

6.13. W trójkącie ABC dane są $\sphericalangle C = 120°$, $|AC| = 7$ cm i $|BC| = 4$ cm. Oblicz długość boku AB.

6.14. Dla jakich $\alpha \in (0°, 360°)$ prawdziwe są następujące nierówności:
(a) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$; **(b)** $\sin\alpha\cos\alpha < 0$; **(c)** $\sin\alpha > \cos\alpha$;
(d) $\operatorname{ctg}\alpha < \sqrt{3}$; **(e)** $\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$; **(f)** $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{ctg}\alpha$?

6.15. Zbadaj, która z liczb w każdej z podanych par jest większa. Wstaw w miejsce „. . . ” znak „=”, <” lub „>”:
(a) $\sin 1 \;\ldots\; \operatorname{tg} 1$; **(b)** $\cos 1 \;\ldots\; \operatorname{ctg} 1$; **(c)** $\sin 2 \;\ldots\; \cos 2$;

6.16. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:
(a) $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$ i $90° < \alpha < 180°$; **(b)** $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ i $270° < \alpha < 360°$;
(c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{24}$ i $180° < \alpha < 270°$; **(d)** $\sin\alpha = -\sqrt{0,2}$ i $180° < \alpha < 270°$.

6.17. Oblicz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\operatorname{ctg}\alpha = m$ i $90° < \alpha < 180°$.

6.18. Określ zbiór wartości funkcji:
(a) $y = 1 + \sin\alpha$; **(b)** $y = 3 - \cos 2\alpha$; **(c)** $y = \operatorname{tg}\,\alpha \cdot \operatorname{ctg}\,\alpha$;
(d) $y = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$; **(e)** $y = 1 - \sin^2\alpha$; **(f)** $y = 2 - 3\cos^2\alpha$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego