

### Lista X.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Szereg geometryczny.

- 10.1. Napisać trzy pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego, którego  $n$ -ty wyraz dany jest wzorem: a)  $a_n = \frac{3n-1}{6}$  b)  $a_n = \frac{5n+7}{3}$  c)  $a_n = \frac{8n-3}{5}$ .
- 10.2. Wiadomo, że  $a_1 = 3$  i  $r = 2$ . Oblicz  $a_{2008}$ .
- 10.3. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.
- 10.4. Oblicz sumę dwustu początkowych liczb nieparzystych.
- 10.5. Oblicz sumę wszystkich 60 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3, poczynając od liczby 12.
- 10.6. Koszt robót przy drążeniu studni przedstawia się następująco: pierwszy metr głębokości kosztuje  $a$  zł, a każdy następny o  $b$  zł drożej niż poprzedni. Obliczyć koszt budowy studni o głębokości 40 m.
- 10.7. Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 37, zaś wyraz jedenasty wynosi 52. Oblicz wyraz dwudziesty.
- 10.8. Między liczby 28 i 52 wstawić dwie liczby  $x$  i  $y$  takie, aby ciąg  $(28, x, y, 52)$  był ciągiem arytmetycznym.
- 10.9. Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 18. Trzydziesty wyraz ciągu jest o 12 większy od wyrazu czternastego. Oblicz pierwszy wyraz ciągu i jego różnicę.
- 10.10. Liczby  $2x^3 - 5x$ ,  $x^2 + x$ ,  $3x + 4$  są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych.  
a) Oblicz  $x$ .  
b) Podaj wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu.
- 10.11. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego pole wynosi 150.
- 10.12. W pewnym ciągu arytmetycznym  $a_1 = 8$ ,  $a_n = 83$ ,  $S_n = 728$ . Oblicz  $n$  i różnicę  $r$  tego ciągu.
- 10.13. Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli suma jego  $n$  początkowych wyrazów wyraża się wzorem  $S_n = 3n^2 + 4n$ .
- 10.14. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 10, piąty wyraz 28, a ostatni wyraz 58. Oblicz wyraz pierwszy oraz liczbę wszystkich wyrazów tego ciągu.
- 10.15. Wiadomo, że pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wynosi 2, zaś iloraz jest równy 3. Oblicz piąty i siódmy wyraz tego ciągu. Obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.
- 10.16. Ciąg  $36, 12\sqrt{6}, 24, \dots$  jest ciągiem geometrycznym.  
a) Oblicz iloraz tego ciągu.  
b) Zapisz  $n$ -ty wyraz ciągu w postaci  $aq^n$ .  
c) Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
- 10.17. Basen ma kształt prostopadłościanu. Długości krawędzi tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3. Objętość basenu wynosi  $729 \text{ m}^3$ . Obliczyć długość krawędzi basenu.
- 10.18. Między liczby 32 i 500 wstawić liczby  $x$  i  $y$  tak dobrane, aby ciąg  $(32, x, y, 500)$  był ciągiem geometrycznym.

- 10.19. Dany jest ciąg geometryczny taki, że  $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ ,  $a_3 - a_1 = 3$ . Wyznaczyć ten ciąg.
- 10.20. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny wynosi 21. Liczby te, powiększone odpowiednio o 2, 3 i 9 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- 10.21. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od pierwszej z nich odejmiemy 2, od drugiej 3, od trzeciej 9, a od czwartej 25, to otrzymane różnice utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.
- 10.22. Dla jakich wartości  $x, y$  liczby  $x + y, x^2, y + 2$  są trzema kolejnymi wyrazami zarówno ciągu arytmetycznego jak i geometrycznego.  
Oblicz sumy podanych szeregów:

10.23.  $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots$

10.24.  $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} + \dots$

10.25.  $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$

10.26.  $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$

10.27. Zamień na ułamki zwykłe: a) 2,(7); b) 0,5(45); c) 2,(21); d) 5,(002).

10.28. Wyznacz pierwszy wyraz szeregu geometrycznego, jeżeli jego suma wynosi  $S = 2\sqrt{2} + 2$ , a iloraz  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

10.29. Niech  $(a_n)$  będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q$ . Uzupełnij brakujące dane w każdej kolumnie tabelki:

$a_1$					$\frac{1}{2}$	9	70	-17
$q$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{4}{5}$				
$S$	-1,7	18	2	-10	$\frac{3}{2}$	13,5	56	$-36\frac{2}{3}$

- 10.30. Znajdź iloraz zbieżnego ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 2$ , a suma wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.
- 10.31. Dla jakich wartości  $a$  szereg geometryczny o ilorazie  $q = a^2 - 3a + 1$  jest zbieżny?
- 10.32. Rozwiąż równanie  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots = \frac{3x + 1}{3}$ .<sup>1</sup>
- 10.33. Dany jest trójkąt równoboczny  $T_1$  o boku długości  $a$ . W ten trójkąt wpisano trójkąt  $T_2$ , tak że każdy wierzchołek trójkąta  $T_2$  należy do innego boku trójkąta  $T_1$ , a kąt między bokami trójkątów  $T_1$  i  $T_2$  wynosi  $30^\circ$ . W trójkąt  $T_2$  wpisano analogicznie trójkąt  $T_3$  itd. Oblicz (a) pole trójkąta  $T_3$ ; (b) sumę nieskończonego ciągu pól wszystkich utworzonych w ten sposób trójkątów.

<sup>1</sup>Po lewej stronie znajduje się suma szeregu geometrycznego