6 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

6.1 Funkcje wykładnicze oraz ich własności.

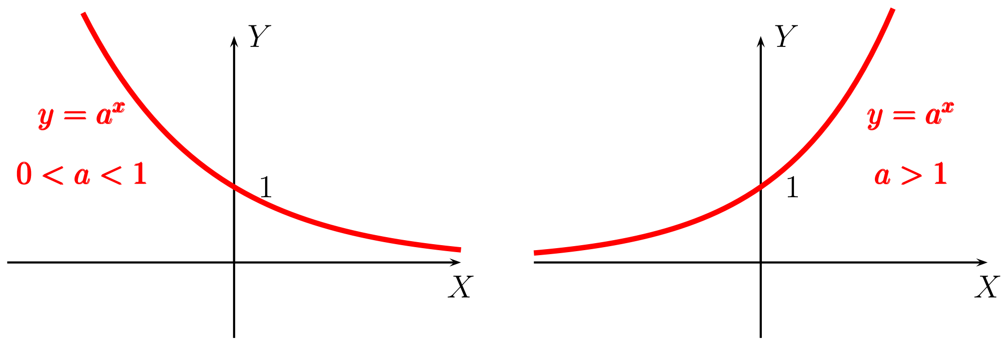
Funkcją wykładniczą nazywamy funkcje f określona wzorem

$$f(x) = a^x, \tag{1}$$

gdzie $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \qquad f(x) \in \mathcal{R}_f = \mathbb{R}_+ = (0,+\infty).$$

Dla $a \in (0,1)$ funkcja wykładnicza jest funkcją malejącą, natomiast dla $a \in (1,+\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Wykres funkcji wykładniczej nazywamy *krzywą wykładniczą*.

Ponieważ $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, dla $a < 0$ i $a \neq 1$, więc krzywe wykładnicze $y = a^x$ i $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ są symetryczne względem osi OY.

6.2 Równania i nierówności wykładnicze.

Równaniem wykładniczym (*nierównością wykładniczą*) nazywamy takie równanie (nierówność), którego niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi.

Równaniem wykładniczym jest na przykład równanie typu: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $f(x)$ i $g(x)$ są dowolnymi funkcjami zmiennej rzeczywistej.

Przykłady równań wykładniczych: $5^{x^2-1} = 25$, $2^{2x} - 5 \cdot 2^x = 6$, itp.; patrz np. lista VIII zadanie **8.2.**

Przykłady nierówności wykładniczych: $5^{x^2-1} < 25$, $2^{2x} - 5 \cdot 2^x > 6$, itp.; patrz np. lista VIII zadanie **8.10.**

Schemat rozwiązywania równań wykładniczych wygląda następująco:

- ustalamy dziedzinę
- sprowadzamy równanie, aby miało takie same podstawy lub sprowadzamy je do równania kwadratowego albo do innego równania, tworząc przy tym odpowiednie założenia. Z równości podstaw wynika równość wykładników
- rozwiązujemy równanie
- sprawdzamy, czy rozwiązania przekształconych równań spełniają nasze założenie
- podajemy odpowiedź

W celu rozwiązania nierówności wykładniczej należy:

- ustalić dziedzinę
- sprowadzić obie strony nierówności do tych samych podstaw albo przekształcamy do innej nierówności, którą potrafimy rozwiązać
- wykorzystujemy własności funkcji wykładniczej, przekształcając odpowiednio nierówność:
  dla $a > 1$
  $$a^n > a^m \iff n > m$$
  $$a^n < a^m \iff n < m$$
  analogicznie dla porównań „$\geqslant$" czy też „$\leqslant$";
  dla $0 < a < 1$
  $$a^n > a^m \iff n < m$$
  $$a^n < a^m \iff n > m$$
  analogicznie dla porównań „$\geqslant$" czy też „$\leqslant$"
- rozwiązujemy otrzymaną nierówność i sprawdzamy, czy rozwiązania należą do dziedziny
- udzielamy odpowiedzi

6.3 Funkcje logarytmiczne oraz ich własności.

Definicja 1. Logarytmem liczby $x > 0$ przy podstawie $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ nazywamy wykładnik potęgi y, do której należy podnieść podstawę a, żeby otrzymać x.
Mamy więc $\boxed{\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x \text{ dla } x > 0 \text{ i } a \in (0,1) \cup (1,+\infty).}$

Z definicji logarytmu wynikają następujące własności:

$$\log_a a = 1, \text{ dla } a \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{2}$$

$$\log_a 1 = 0, \text{ dla } a \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{3}$$

Jeżeli $x > 0$, $y > 0$ i $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, to

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \tag{4}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \tag{5}$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \qquad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \text{dla } b \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{7}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \qquad \text{dla } x \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{8}$$

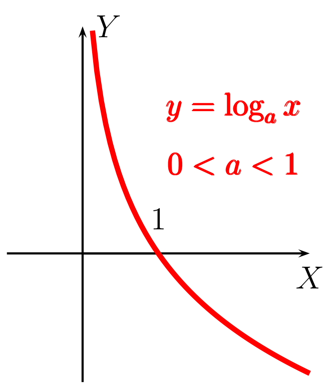
$$a = b^{\log_b a}, \qquad \text{dla } a > 0,\ b \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{9}$$

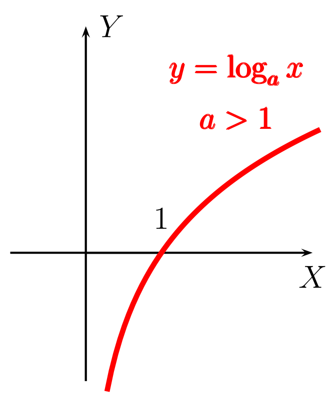
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcje f określona wzorem

$$f(x) = \log_a x, \qquad \text{gdzie } a \in (0,1) \cup (1,+\infty). \tag{10}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = (0,+\infty), \qquad f(x) \in \mathcal{R}_f = \mathbb{R}.$$

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0,1)$, natomiast dla $a \in (1,+\infty)$ jest funkcją rosnącą.

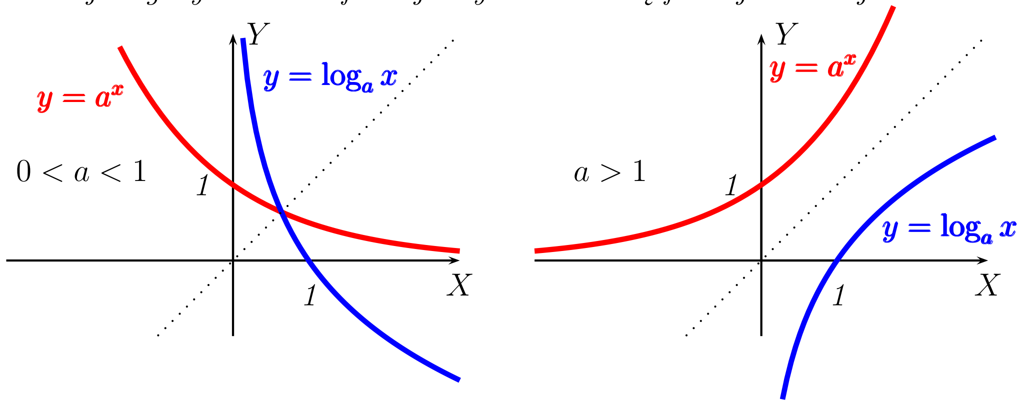




Wykres funkcji wykładniczej nazywamy *krzywą logarytmiczną*.

Ponieważ $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, dla $a < 0$ i $a \neq 1$, więc krzywe logarytmiczne $y = \log_a x$ i $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ są symetryczne względem osi OX.

Uwaga 2. *Funkcja logarytmiczna i funkcja wykładnicza są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.*



6.4 Równania i nierówności logarytmiczne.

Równaniem logarytmicznym (*nierównością logarytmiczną*) nazywamy równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu.

Przykłady równań logarytmicznych: $\log_5(x^2-1) = 25$, $\log_2^2 x - 5\cdot\log_2 x = 6$, itp.; patrz np. lista IX zadania **9.12., 9.15.**

Przykłady nierówności logarytmicznych: $\log_5(x^2-1) < 25$, $\log_2^2 x - 5\cdot\log_2 x > 0$, itp.; patrz np. lista IX zadania **9.13., 9.16.**

`Wyznaczając rozwiązania równania logarytmicznego (nierówności logarytmicznej) powinno się:`

- ustalić dziedzinę
- sprowadzić obie strony równania (nierówności) do tych samych podstaw albo przekształcić do innego równania (innej nierówności), które (którą) potrafimy rozwiązać
- wykorzystując własności funkcji logarytmicznej przekształcić równanie (nierówność) tzn:

dla $a > 1$

$$\log_a n \geqslant \log_a m \iff n \geqslant m$$
$$\log_a n \leqslant \log_a m \iff n \leqslant m$$

dla $0 < a < 1$

$$\log_a n \geqslant \log_a m \iff n \leqslant m$$
$$\log_a n \leqslant \log_a m \iff n \geqslant m$$

- rozwiązać otrzymane równanie (otrzymaną nierówność) i sprawdzić, czy rozwiązania należą do dziedziny
- podać odpowiedź.