5 Funkcje wymierne.

Definicja 1. *Funkcją wymierną* nazywamy iloraz postaci

$$w(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

gdzie P i Q są wielomianami, przy czym Q nie jest wielomianem zerowym. Jeżeli wielomiany te są rzeczywiste, to mówimy o funkcjach wymiernych rzeczywistych. Jeśli $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$ (stopień wielomianu P jest mniejszy niż stopień wielomianu Q), to mówimy, że funkcja wymierna jest *właściwa*. W przeciwnym przypadku mówimy, że funkcja wymierna jest *niewłaściwa*.

Funkcja wymierna w jest określona na zbiorze $D_w = \mathbb{R} \setminus \{x : \ Q(x) = 0\}$.
Funkcjami wymiernymi są na przykład wyrażenia

$$\frac{x^2}{x+1}, \frac{x^3+7x^2-8}{x^7+1}.$$

Pierwsze z tych wyrażeń jest funkcją wymierną niewłaściwą, a drugie wyrażenie jest funkcją wymierną właściwą.

Twierdzenie 2. *Każda funkcja wymierna niewłaściwa jest sumą niezerowego wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.*

Dowód. Niech $w(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gdzie $\mathrm{st}P \geqslant \mathrm{st}Q$. Niech S będzie ilorazem, a Q— resztą z dzielenia P przez Q. Z Twierdzenia (o dzieleniu z resztą) mamy równość $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$, gdzie $\mathrm{st}R < \mathrm{st}Q$. Ponieważ $\mathrm{st}P \geqslant \mathrm{st}Q$, więc S nie może być wielomianem zerowym. Wobec tego możemy podzielić ostatnią równość stronami przez $Q(x)$, otrzymując żądany rozkład wyjściowej funkcji na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x)+R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Funkcja wymierna $\frac{R(x)}{Q(x)}$ jest oczywiście właściwa, ponieważ $\mathrm{st}R < \mathrm{st}Q$. □

Z powyższego dowodu wynika, że podany w twierdzeniu rozkład można zawsze znaleźć, wykonując dzielenie licznika funkcji wymiernej przez jej mianownik (zwykłe dzielenie wielomianów z resztą). Czasami udaje się dokonać rozkładu przy użyciu elementarnych przekształceń, np.:

$$\frac{x^2+2x-2}{x+1} = \frac{x^2+x+x+1-3}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x+1)-3}{x+1} = x+1-\frac{3}{x+1}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

5.1 Funkcja homograficzna i jej własności

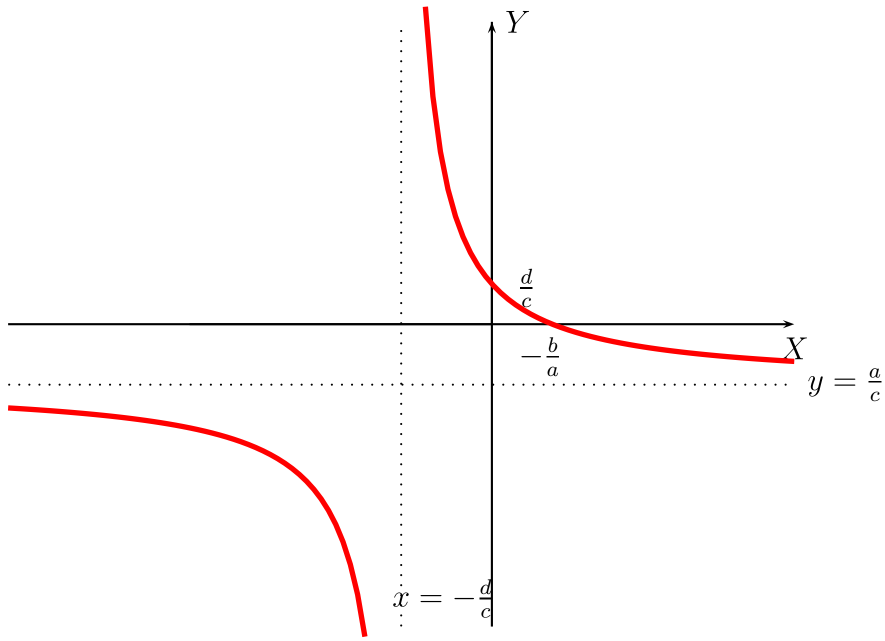
Wśród funkcji wymiernych wyróżnia się funkcję postaci:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{2}$$

gdzie $c \neq 0$ oraz $ad - cb \neq 0$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \qquad f(x) \in \mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

Funkcję f zdefiniowaną wzorem (2) nazywamy *funkcją homograficzną*.
Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.



Jeżeli $a \neq 0$, to miejscem zerowym funkcji homograficznej jest $x = -\dfrac{b}{a}$.
Jeżeli $ad - bc > 0$, to funkcja homograficzna postaci (2) jest rosnąca w swojej dziedzinie.
Jeżeli $ad - bc < 0$, to funkcja homograficzna postaci (2) jest malejąca w swojej dziedzinie.
Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja homograficzna postaci (2) jest funkcją wymierną niewłaściwą, więc z Twierdzenia 2 mamy

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Wówczas wykres funkcji $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\mathcal{A}}{x}$, gdzie $\mathcal{A} = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, o wektor $\left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right]$.

5.2 Ułamki proste

Z Twierdzenia 2 wiemy, że każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną właściwą można z kolei przedstawić w postaci sumy pewnych specjalnych funkcji wymiernych, zwanych *ułamkami prostymi*.

Rzeczywiste ułamki proste dzielą się na *ułamki proste pierwszego rodzaju* oraz *ułamki proste drugiego rodzaju*.

Definicja 3. *Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju* nazywamy funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n},$$

gdzie A, $a \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 4. *Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju* nazywamy funkcję wymierną postaci

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie A, B, p, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $p^2-4q<0$ (trójmian kwadratowy w mianowniku jest nierozkładalny).

5.3 Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Twierdzenie 5. *Niech* $w(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *będzie niezerową rzeczywistą funkcją wymierną właściwą. Załóżmy, że mianownik Q ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne:*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}.$$

Wówczas $w(x)$ jest sumą $n_1 = k_1+k_2+\ldots+k_r$ rzeczywistych ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $n_2 = l_1+l_2+\cdots+l_s$ rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju. W rozkładzie tym każdemu czynnikowi

$$(x-x_i)^{k_i}, \quad i=1,\ldots,r$$

odpowiada suma k_i rzeczywistych ułamków prostych postaci

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{ik_2}}{(x-x_i)^2}+\cdots+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

natomiast każdemu czynnikowi

$$\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}, \quad j=1,\ldots,s$$

odpowiada suma l_j rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju postaci

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\cdots+\frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}}.$$

tzn.

$$\begin{aligned}w(x)=&\frac{A_{11}}{x-x_1}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}}+\cdots+\frac{A_{r1}}{x-x_r}+\cdots+\frac{A_{rk_r}}{\left(x-x_r\right)^{k_r}}+\\&+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\cdots+\frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}.\end{aligned}$$

Powyższy rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności składników.

Zauważmy, że mianowniki funkcji wymiernej zostały podane w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych. Jeśli mianownik funkcji wymiernej podamy w postaci rozwiniętej, np.

$$\frac{x+4}{x^3-x^2-2x},$$

to musimy taki mianownik najpierw rozłożyć na czynniki:

$$\frac{x+4}{x(x+1)(x-2)},$$

a dopiero potem zastosować twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste.

Przykład 6. Rozkład funkcji wymiernej postaci

$$\frac{1}{(x-3)^3(x+2)}$$

na ułamki proste jest następujący:

$$\frac{1}{(x-3)^3(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{D}{x+2}$$

Mianownik funkcji wymiernej jest iloczynem dwóch dwumianów, z których jeden występuje w trzeciej, a drugi w pierwszej potędze. Otrzymujemy trzy ułamki proste odpowiadające dwumianowi $x-3$ oraz jeden ułamek prosty odpowiadający dwumianowi $x+2$.

Przykład 7. Rozkład funkcji

$$\frac{1}{x\left(x^2+x+2\right)^2}$$

na ułamki proste jest następujący:

$$\frac{1}{x\left(x^2+x+2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$

Mianownik funkcji wymiernej jest iloczynem jednomianu stopnia pierwszego oraz drugiej potęgi trójmianu nierozkładalnego. Otrzymujemy jeden ułamek prosty odpowiadający jednomianowi x oraz dwa ułamki proste odpowiadające trójmianowi x^2+x+2.

5.4 Równania i nierówności wymierne.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci: $w(x) = v(x)$ gdzie w i v są funkcjami wymiernymi. Dziedziną tego równania jest część wspólna dziedzin funkcji wymiernych w i v.

5.4.1 Sposoby rozwiązywania równań wymiernych.

`I sposób:` (krótszy, ale ogólnie nie można stosować przy nierównościach)

- rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki
- ustalamy dziedzinę ($\mathbb{R} \setminus \{$miejsca zerowe mianowników$\}$)
- obustronnie mnożymy równanie przez wspólny mianownik
- rozwiązujemy otrzymane równanie liniowe, kwadratowe lub wielomianowe.
- sprawdzamy, czy rozwiązanie należy do dziedziny.

Przykład 8. Rozwiążemy równanie

$$\frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{1-x} = \frac{x^2}{x^2-1}. \tag{3}$$

Wtedy $$\frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{1-x} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}, \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{1-x} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \qquad \Big/ \cdot (x-1)(x+1)$$

$$2(x-1) + (x+1)^2 = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x - 2 + x^2 + 2x + 1 = x^2$$

$$4x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{4} \in \mathcal{D}.$$

Stąd $x = \frac{1}{4}$ jest rozwiązaniem równania (3).

`II sposób:`

- rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki
- ustalamy dziedzinę ($\mathbb{R} \setminus \{$miejsca zerowe mianowników$\}$)
- przenosimy wszystko na lewą stronę
- ustalamy wspólny mianownik
- rozszerzamy wszystko do wspólnego mianownika i zapisujemy na jednej kresce ułamkowej
- porównujemy licznik do zera (ułamek = 0 wtedy, gdy licznik = 0) i rozwiązujemy otrzymane równanie liniowe, kwadratowe lub wielomianowe
- sprawdzamy, czy rozwiązanie należy do dziedziny.

Przykład 9. Rozwiążemy równanie

$$\frac{2x}{2-x}+\frac{4}{x}=3. \tag{4}$$

Wtedy $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ i

$$\begin{aligned}\frac{2x\cdot x+4\cdot(2-x)-3x(2-x)}{x(2-x)} &= 0\\ 5x^2-10x+8 &= 0\\ \Delta &< 0\end{aligned}$$

Stąd brak rozwiązań równania (4) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Uwaga 10. *Jeżeli równanie ma postać proporcji (równość dwóch ułamków) To: iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych*

- *ustalamy dziedzinę (* $\mathbb{R}\setminus\{$*miejsca zerowe mianowników*$\}$*)*
- *porównujemy iloczyny wyrazów skrajnych i środkowych i rozwiązujemy otrzymane równanie*
- *sprawdzamy, czy rozwiązanie należy do dziedziny.*

Przykład 11. Rozwiążemy równanie

$$\frac{x}{x+2}=\frac{3x}{x-3}. \tag{5}$$

Wtedy

$$\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\},$$

$$x(x-3)=3x(x+2);$$

$$x^2–3x=3x^2+6x;$$

$$2x^2+9x=0;$$

$$2x\left(x+\frac{9}{2}\right)=0;$$

$$x_1=0\in\mathcal{D}\vee x_2=-4,5\in\mathcal{D}.$$

Zatem rozwiązaniem równania (5) są liczby 0 lub −4,5.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Nierównością wymierną nazywamy każdą nierówność w postaci: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, $\frac{Q(x)}{Q(x)} < 0$ oraz $\frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0$, gdzie P i Q są wielomianami.

5.4.2 Sposoby rozwiązywania nierówności wymiernych.

`I sposób:`

- przenosimy wszystko na jedną stronę
- rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki
- ustalamy dziedzinę ($\mathbb{R} \setminus \{$miejsca zerowe mianowników$\}$)
- ustalamy wspólny mianownik
- rozszerzamy wszystko do wspólnego mianownika i zapisujemy na jednej kresce ułamkowej
- porządkujemy licznik i rozkładamy go na czynniki
- iloraz (ułamek) zamieniamy na iloczyn (znak wyniku dla ilorazu i iloczynu podobnie ustalamy)
- rozwiązujemy otrzymaną nierówność wielomianową będącą już w postaci iloczynowej
- ustalamy część wspólną rozwiązania i dziedziny.

Przykład 12. Rozwiążmy nierówność

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leqslant -1. \tag{6}$$

Wtedy $\frac{2x-5}{(x-2)(x-4)} + \frac{1\,(x^2-6x+8)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0$ i

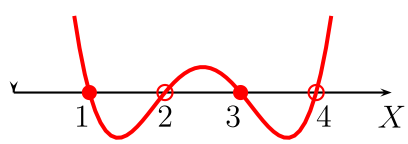
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2,4\},$$

$$\frac{2x-5+x^2-6x+8}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0;$$

$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0;$$

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0;$$

$$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) \leqslant 0 \ \wedge \ x \neq \{2,4\}.$$



$$x \in \langle 1,2) \cup \langle 3,4).$$

Zatem rozwiązaniem nierówności (6) jest zbiór $\langle 1,2) \cup \langle 3,4)$.

`II sposób:`

- rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki
- ustalamy dziedzinę ($\mathbb{R} \setminus \{$miejsca zerowe mianowników$\}$)
- mnożymy obustronnie nierówność przez kwadraty mianowników liniowych lub przez inne wyrażenia, których znak jest jednoznacznie określony
- rozwiązujemy otrzymaną nierówność wielomianową będącą już w postaci iloczynowej
- ustalamy część wspólną rozwiązania i dziedziny.

Przykład 13. Rozwiążmy nierówność

$$\frac{4-x}{x^2} - \frac{2}{x} \geqslant 1. \tag{7}$$

Wtedy

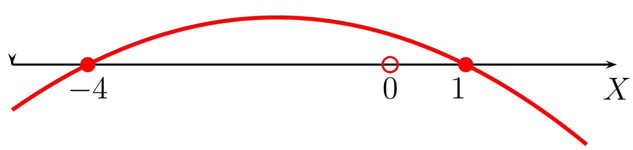
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{4-x}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 \geqslant 0 \qquad / \cdot x^2$$

$$4 - x - 2x - x^2 \geqslant 0;$$

$$-x^2 - 3x + 4 \geqslant 0;$$

$$-(x-1)(x+4) \geqslant 0.$$



$$x \in \langle -1, 4) \setminus \{0\}.$$

Zatem rozwiązaniem nierówności (7) jest zbiór $\langle -1, 4) \setminus \{0\}$.