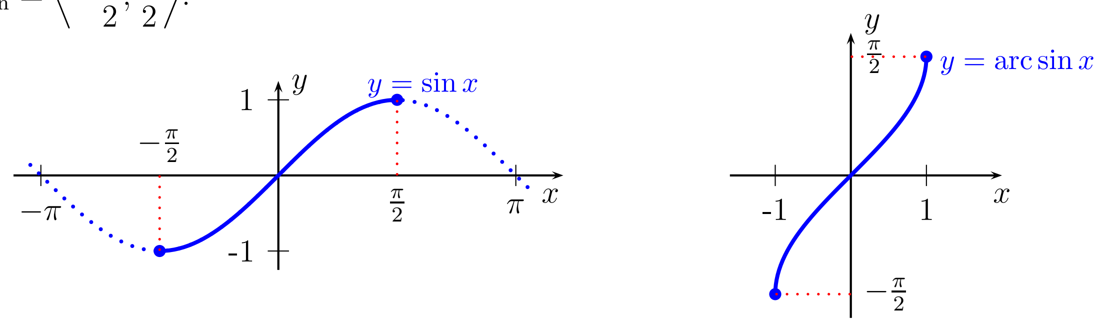
3 Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

Funkcje cyklometryczne (funkcje kołowe) to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów. Funkcje trygonometryczne rozpatrywane na całym zbiorze $\mathbb{R}$ nie są oczywiście różnowartościowe, ale jeśli zawęzimy dziedziny do pewnych przedziałów ($\sin : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \langle -1, 1\rangle$; $\cos : \langle 0, \pi\rangle \to \langle -1, 1\rangle$; $\operatorname{tg} : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}$; $\operatorname{ctg} \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$), to tak określone funkcje będą już różnowartościowe i mają funkcje odwrotne.

Definicja 1. Funkcję odwrotną do funkcji sin (sinus) obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy arc sin *(arkus sinus)*. Mamy zatem

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \text{ dla } -1 \leqslant x \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną funkcji arc sin jest przedział $\mathcal{D}_{\arcsin} = \langle -1, 1\rangle$, zaś zbiorem wartości przedział $\mathcal{R}_{\arcsin} = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

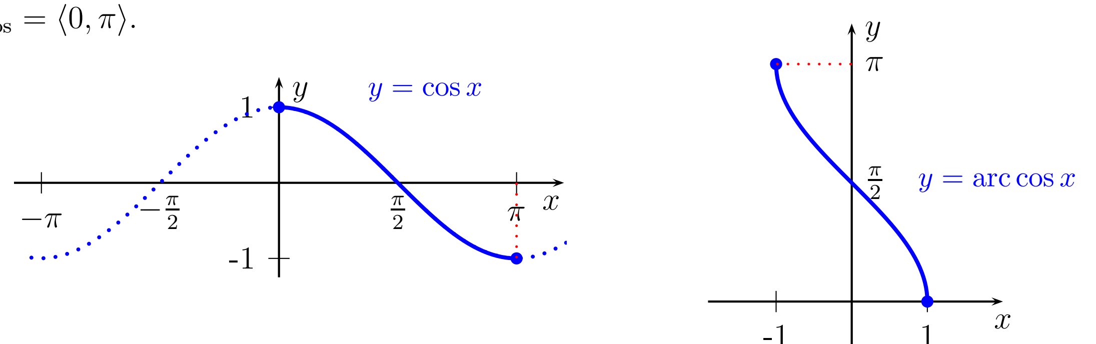


Rysunek 1: Wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$.

Definicja 2. Funkcję odwrotną do funkcji cos (cosinus) obciętej do przedziału $\langle 0, \pi\rangle$ nazywamy arc cos *(arkus cosinus)*. Mamy zatem

$$\arccos x = y \iff \cos y = x \text{ dla } -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Dziedziną funkcji arc cos jest przedział $\mathcal{D}_{\arccos} = \langle -1, 1\rangle$, zaś zbiorem wartości przedział $\mathcal{R}_{\arccos} = \langle 0, \pi\rangle$.



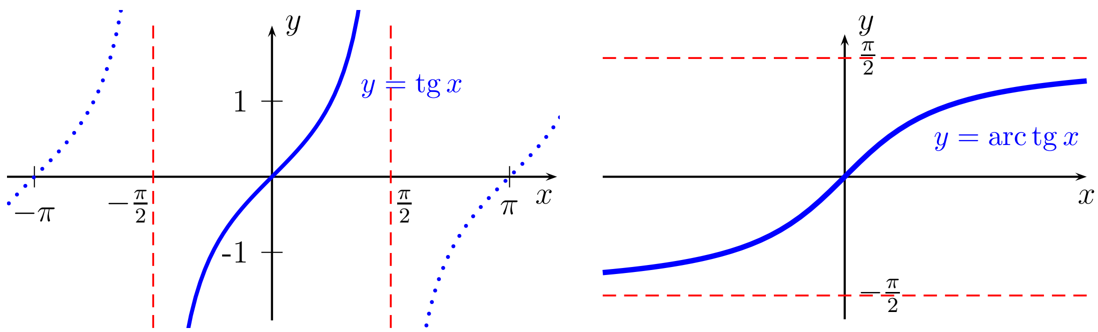
Rysunek 2: Wykresy funkcji $y = \cos x$ i $y = \arccos x$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Definicja 3. Funkcję odwrotną do funkcji tg (tangens) obciętej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nazywamy arc tg *(arkus tangens)*. Mamy zatem

$$\operatorname{arc\,tg} x = y \Longleftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ dla } x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną funkcji arc tg jest $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R}$, zaś zbiorem wartości przedział $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

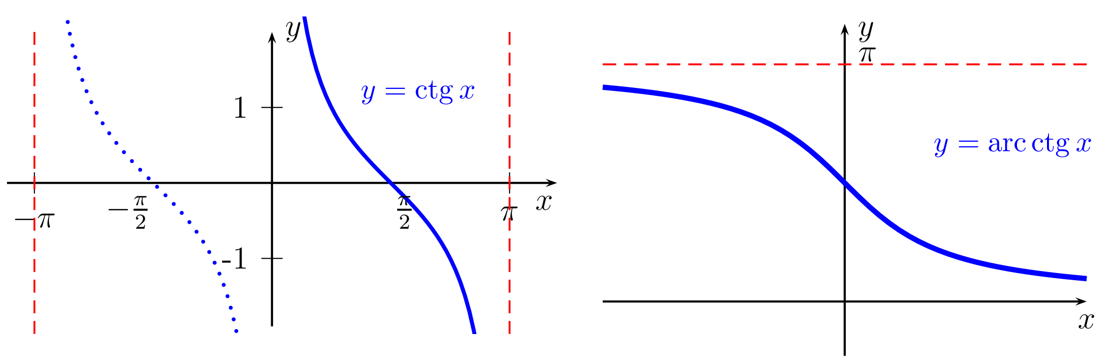


Rysunek 3: Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Definicja 4. Funkcję odwrotną do funkcji ctg (cotangens) obciętej do przedziału $(0, \pi)$ nazywamy arc ctg *(arkus cotangens)*. Mamy zatem

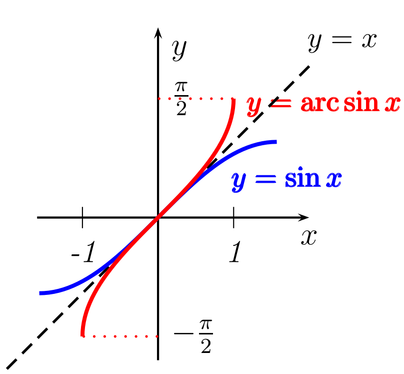
$$\operatorname{arc\,ctg} x = y \Longleftrightarrow \operatorname{ctg} y = x \text{ dla } x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi.$$

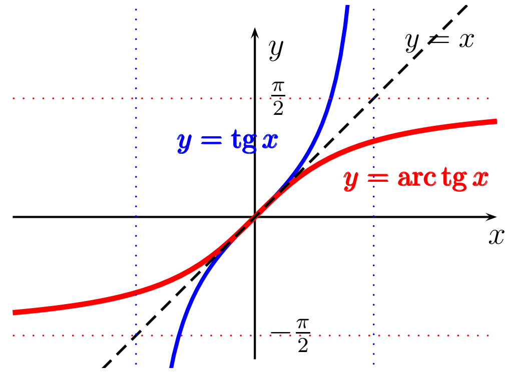
Dziedziną funkcji arc ctg jest $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,ctg}} = \mathbb{R}$, zaś zbiorem wartości przedział $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,ctg}} = (0, \pi)$.

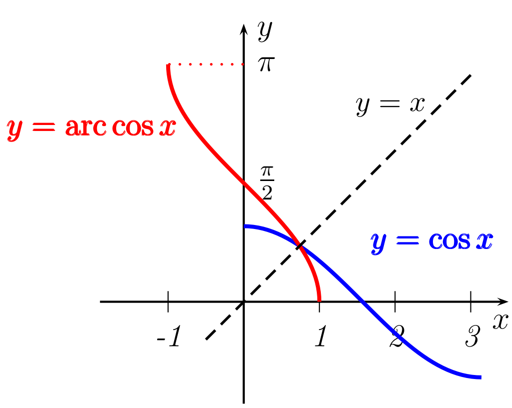


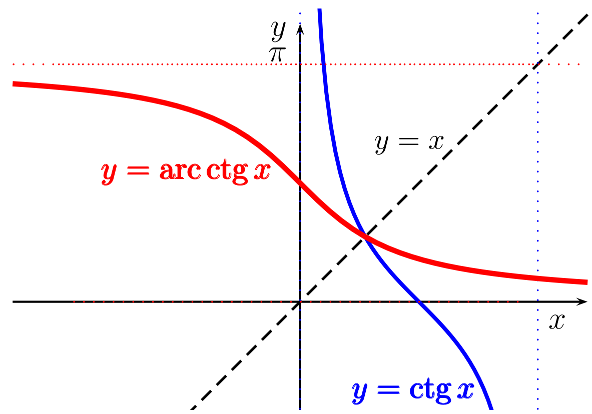
Rysunek 4: Wykresy funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

Uwaga 5. *Wykresy funkcji cyklometrycznych otrzymujemy odbijając symetrycznie względem prostej $y = x$ wykresy funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów:*









3.1 Podstawowe tożsamości z funkcjami cyklometrycznymi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ dla każdego } x \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{1}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$