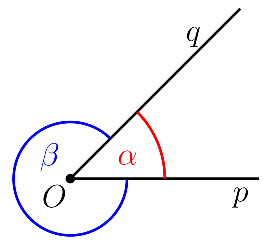
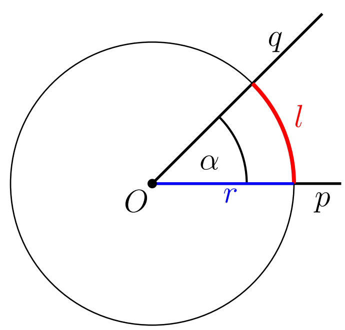
# 2 Funkcje trygonometryczne.

## 2.1 Kąt i jego miara

**Definicja 1.** Części płaszczyzny ograniczone dwiema półprostymi $p$ i $q$ wychodzącymi ze wspólnego punktu $O$ nazywamy *kątami*, przy czym kąt $\alpha$ jest kątem *wypukłym*, zaś $\beta$ kątem *wklęsłym*. Półproste $k$ i $l$ nazywamy *ramionami* tych *kątów*, a punkt $O$ ich *wierzchołkiem*.

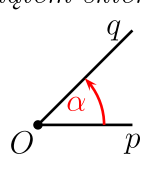



*Miara stopniowa* stosowana w geometrii oparta jest na podziale pełnego kąta na 360 równych części, tzn. 360°. Dalszego podziału dokonuje się w systemie sześćdziesiątkowym, tzn. $1° = 60'$ (minut), $1' = 60''$ (sekund). [1]
Do ilościowego opisu kąta stosuje się również tzw. miarę łukową.
*Miarą łukową kąta* nazywamy liczbę $\alpha$ będącą stosunkiem długości $l$ łuku okręgu o środku w $O$, zawartego wewnątrz kąta, do promienia okręgu $r$. Jednostką miary łukowej jest **radian** (rad) będący miarą kąta, którego długość łuku okręgu $l$ jest równa promieniowi okręgu.
**1 rad** $= 57°17'44,8'' = 57{,}2958°$




$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Kąt, którego jedno ramię $p$ wyróżniamy jako początkowe, a drugie $q$ jako końcowe nazywamy *kątem skierowanym.*



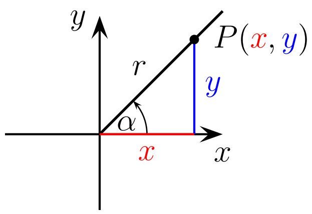

Kąt skierowany otrzymujemy przez obrót na płaszczyźnie półprostej wychodzącej z ustalonego punktu $O$. Jeżeli kierunek obrotu jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara, to przyjmujemy, że kąt ma miarę dodatnią, a jeżeli kierunek jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, to kąt ma miarę ujemną.

[1] W geodezji kąt płaski mierzy się w *gradusach*. Kąt pełny odpowiada 400 gradusom.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

## 2.2 Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego

Niech $\alpha$ będzie miarą dowolnego kąta skierowanego na płaszczyźnie $XOY$. Wówczas




$$\begin{array}{rcl} \sin(\cdot) & : & \mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \sin\alpha = \dfrac{y}{r}, \\ \cos(\cdot) & : & \mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \cos\alpha = \dfrac{x}{r}, \\ \operatorname{tg}(\cdot) & : & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \ni \alpha \mapsto \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}, \\ \operatorname{ctg}(\cdot) & : & \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \ni \alpha \mapsto \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}. \end{array}$$

## 2.3 Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu

$$\begin{array}{rl} \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \forall_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}} & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \\ \forall_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}} & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \forall_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}} & \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1. \end{array}$$

## 2.4 Funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu oraz sumy i różnicy argumentów

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

## 2.5 Okresowość funkcji trygonometrycznych

Funkcje $\sin(\cdot)$ i $\cos(\cdot)$ są funkcjami okresowymi o okresie podstawowym $2\pi$, natomiast funkcje $\operatorname{tg}(\cdot)$ i $\operatorname{ctg}(\cdot)$ są funkcjami okresowymi o okresie podstawowym $\pi$, tzn.

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}, & \cos(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg}(\alpha+k\pi) = \operatorname{tg}\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}, & \operatorname{ctg}(\alpha+k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{array}$$

## 2.6 Parzystość funkcji trygonometrycznych

Funkcja $\cos(\cdot)$ jest funkcją parzystą, zaś pozostałe funkcje są nieparzyste, tzn.:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

## 2.7 Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

| | Zakres kąta; $\alpha \in$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $(0, 90^\circ)$ | $(90^\circ, 180^\circ)$ | $(180^\circ, 270^\circ)$ | $(270^\circ, 360^\circ)$ |
| | $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ | $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ | $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ |
| $\sin\alpha$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\cos\alpha$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

## 2.8 Wartości funkcji trygonometrycznych podstawowych argumentów

| | $\alpha =$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kąt w stopniach | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
| Miara łukowa | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ | $0$ | $\times$ | $0$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\times$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\times$ | $0$ | $\times$ |

## 2.9 Wzory redukcyjne

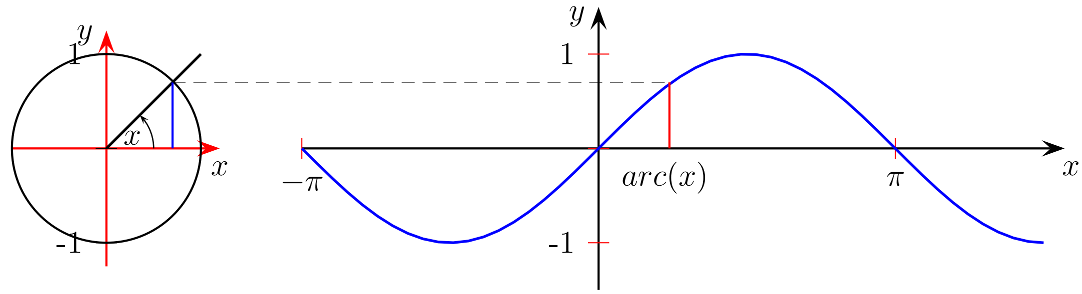
| | $\beta =$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ | $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ | $2\pi - \alpha$ | $2\pi + \alpha$ |
| $\sin\beta$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\beta$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}\beta$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |

UWAGA! Wzory redukcyjne można zapamiętać stosując dwie zasady:
**ZASADA I:** Ustalanie znaku, patrz 2.7.
**ZASADA II:** W „okolicach” $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3}{2}\pi$ funkcja zmienia się na kofunkcję (tzn. $\sin(\cdot)$ na $\cos(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ na $\sin(\cdot)$, $\operatorname{tg}(\cdot)$ na $\operatorname{ctg}(\cdot)$ i $\operatorname{ctg}(\cdot)$ na $\operatorname{tg}(\cdot)$).

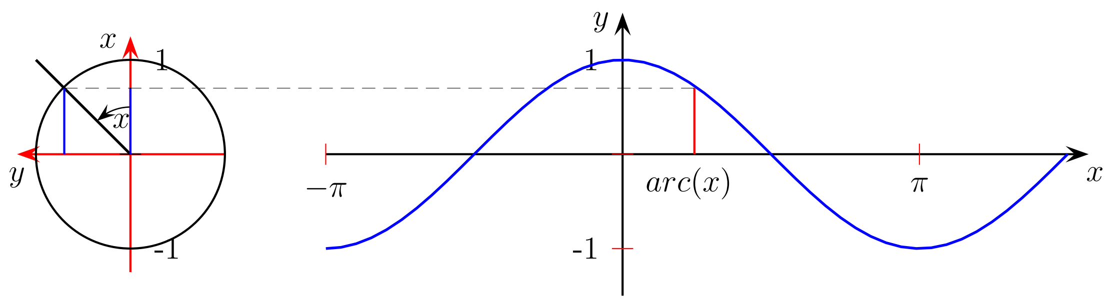
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

## 2.10 Wykresy funkcji trygonometrycznych

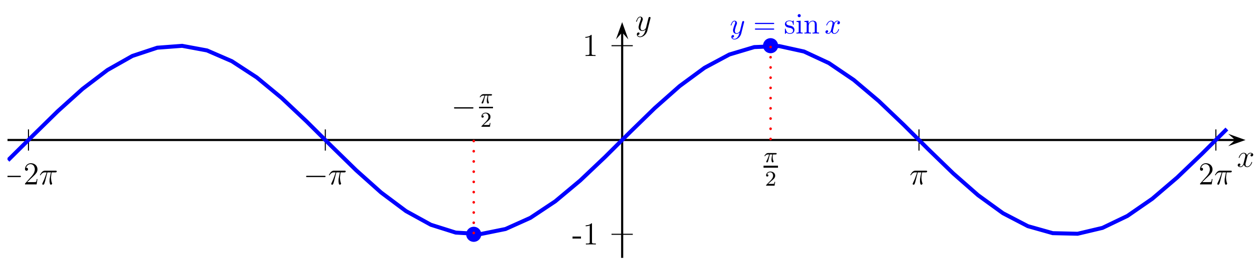
Niech $x$ będzie argumentem funkcji trygonometrycznych. Wtedy mamy następujący opis tych funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$.



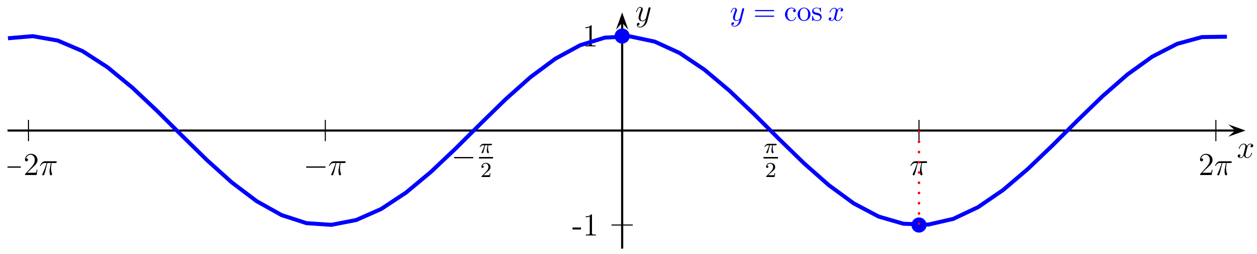

Rysunek 1: Konstrukcja sinusoidy.



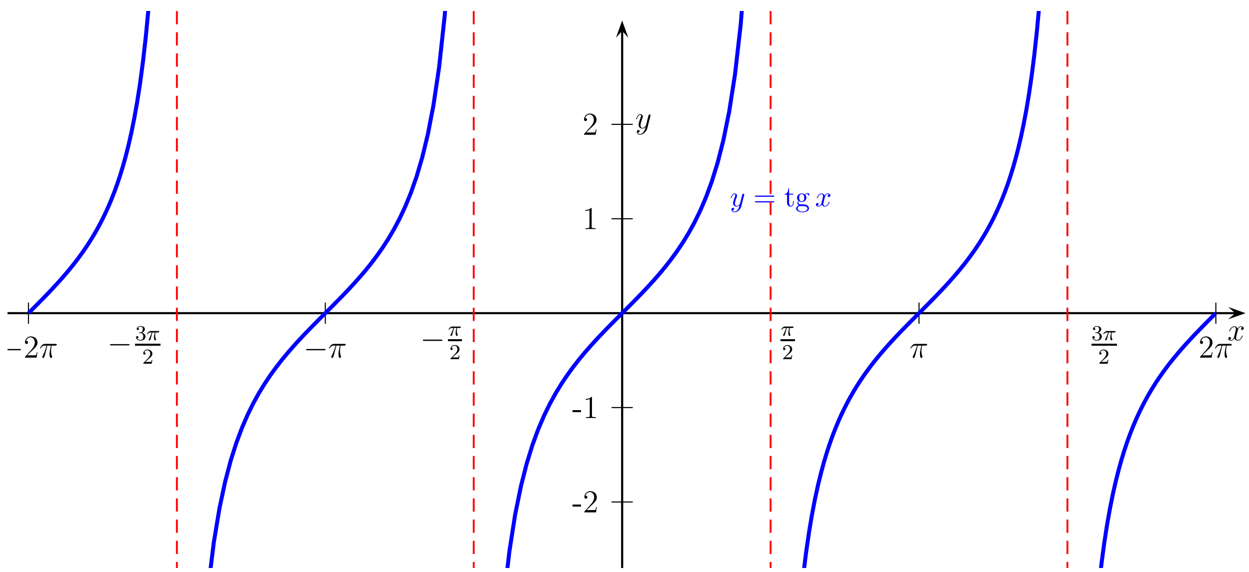

Rysunek 2: Konstrukcja cosinusoidy.



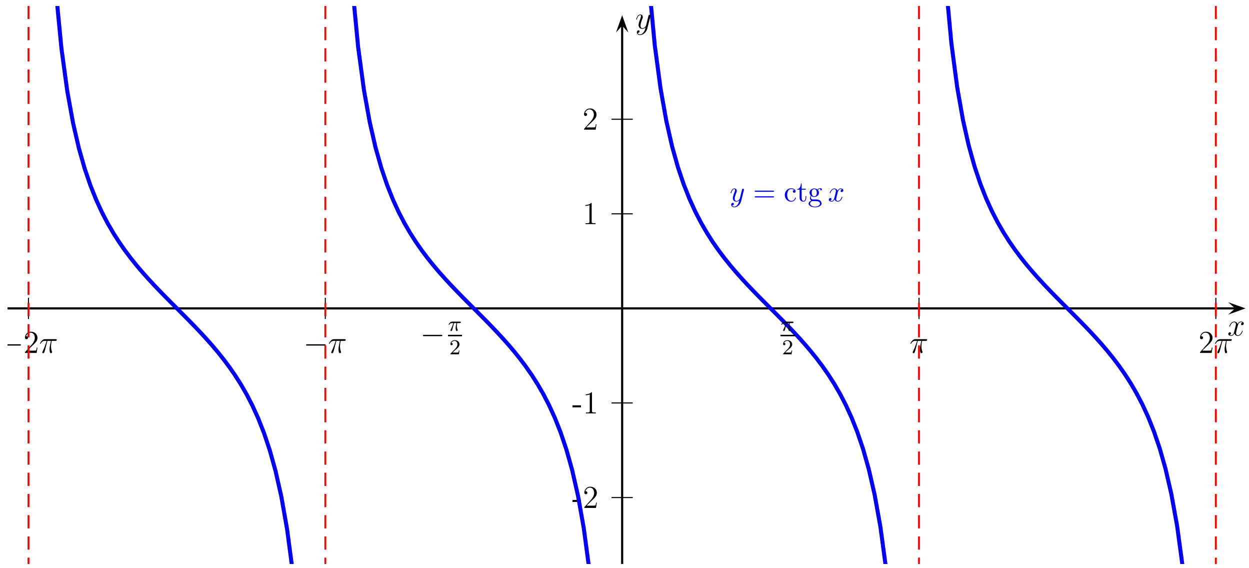

Rysunek 3: Wykres funkcji $\sin(\cdot)$ (sinusoida).




Rysunek 4: Wykres funkcji $\cos(\cdot)$ (cosinusoida).




Rysunek 5: Wykres funkcji $\mathrm{tg}(\cdot)$ (tangensoida)




Rysunek 6: Wykres funkcji $\mathrm{ctg}(\cdot)$ (cotangensoida).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY