Lista 12.

Ciągi liczbowe, szereg geometryczny

12.1. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{pn^2-1}{(p-1)n^2+1}$. Dla jakich wartości parametru p spełniony jest warunek: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$. Określ ciąg (a_n) dla wyznaczonego p.

12.2. Dane są ciągi liczbowe $a_n = \dfrac{3n+5}{2n-1}$ i $b_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$. Zbadaj ich monotoniczność, a następnie określ, które wyrazy ciągu a_n są większe od 2.

12.3. Ciąg liczbowy a_n określony jest wzorami: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Wykonaj wykres tego ciągu oraz podaj i udowodnij wzór wyrażający a_n w zależności od $n \in \mathbb{N}$.

12.4. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $8\log_3\sqrt{3}$, szósty wyraz ciągu jest równy $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$. Wyznacz ten ciąg. Ile początkowych wyrazów ciągu należy wziąć, aby ich suma była równa 14650?

12.5. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 30, różnica ciągu $r = -3$, ostatni wyraz stanowi $\dfrac{1}{8}$ sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę wyrazów i sumę ciągu.

12.6. Trzy liczby $\log(x-3), \log x, \log\dfrac{2x}{x-5}$ wzięte w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x.

12.7. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62. Suma logarytmów dziesiętnych tych liczb jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.

12.8. Trzy liczby, których suma jest równa 21 tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od tych liczb odejmiemy odpowiednio liczby $1, 4, 3$, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

12.9. Trzy liczby, których suma jest równa 35 są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Jeśli od pierwszej z tych liczb odejmiemy 2, od drugiej 3, a od trzeciej 9, to otrzymamy pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz te ciągi i dla każdego z nich oblicz S_{10}.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

12.10. Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz $a_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+2+3+...+n)}{n(n-1)}$, iloraz q jest elementem zbioru $A \cap B$, gdzie zbiór $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + |x| = 1\}$, a zbiór B jest dziedziną funkcji $y = \log_x(2x+1)$.

12.11. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$. Dla jakich naturalnych n spełniona jest nierówność $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

12.12. W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło, w które następnie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów koło i tak dalej. Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół.

12.13. Wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ pewnego nieskończonego ciągu (a_n) spełniają warunki $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20$, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$. Wiedząc, że nieskończony ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 4^{3a_n+5}$ jest ciągiem geometrycznym, oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n).

12.14. Wartości funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ spełniają dla każdego $x \in D_f$ następujące równanie: $1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + ... = \frac{1}{2x^2 - 3x}$, gdzie lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

12.15. Oblicz granice ciągów o wyrazie ogólnym (a_n):

(a) $a_n = 2^{\frac{1}{n}} + \frac{3n+5}{2n}$

(b) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n+3}$

(c) $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{3+\frac{2}{n}}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5}$

(e) $a_n = \frac{2^{n+3} - 5}{4^n + 3}$

(f) $a_n = \frac{2n^7 + 12n^2 + 3n + 5}{(2n^2+1)^2(3n-7)}$

(g) $a_n = \sqrt{3n^2 + 2n - 7} - n\sqrt{3}$

(h) $a_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{3-n}$

(i) $a_n = \sqrt{\frac{9n^2 + 4n}{n^2 + 3}}$

(j) $a_n = \frac{\sqrt{3n^2 + 12}(2n+7)}{5n^2 + \sqrt{2n+1}}$,

(k) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2} + \frac{n+1}{n}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego