

Lista 12.

Ciągi liczbowe, szereg geometryczny

- 12.1.** Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{pn^2 - 1}{(p-1)n^2 + 1}$. Dla jakich wartości parametru p spełniony jest warunek: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$. Określ ciąg (a_n) dla wyznaczonego p .
- 12.2.** Dane są ciągi liczbowe $a_n = \frac{3n+5}{2n-1}$ i $b_n = \frac{n^2-1}{n+2}$. Zbadaj ich monotoniczność, a następnie określ, które wyrazy ciągu a_n są większe od 2.
- 12.3.** Ciąg liczbowy a_n określony jest wzorami: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Wykonaj wykres tego ciągu oraz podaj i udowodnij wzór wyrażający a_n w zależności od $n \in \mathbb{N}$.
- 12.4.** Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $8 \log_3 \sqrt{3}$, szósty wyraz ciągu jest równy $\frac{5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$. Wyznacz ten ciąg. Ile początkowych wyrazów ciągu należy wziąć, aby ich suma była równa 14650?
- 12.5.** Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 30, różnica ciągu $r = -3$, ostatni wyraz stanowi $\frac{1}{8}$ sumy wszystkich poprzednich wyrazów. Wyznacz liczbę wyrazów i sumę ciągu.
- 12.6.** Trzy liczby $\log(x-3), \log x, \log \frac{2x}{x-5}$ wzięte w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x .
- 12.7.** Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62. Suma logarytmów dziesiętnych tych liczb jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.
- 12.8.** Trzy liczby, których suma jest równa 21 tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od tych liczb odejmiemy odpowiednio liczby 1, 4, 3, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- 12.9.** Trzy liczby, których suma jest równa 35 są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Jeśli od pierwszej z tych liczb odejmiemy 2, od drugiej 3, a od trzeciej 9, to otrzymamy pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz te ciągi i dla każdego z nich oblicz S_{10} .



12.10. Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n(n-1)},$$

iloraz q jest elementem zbioru $A \cap B$, gdzie zbiór $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + |x| = 1\}$, a zbiór B jest dziedziną funkcji $y = \log_x(2x + 1)$.

12.11. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$. Dla jakich naturalnych n spełniona jest nierówność $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

12.12. W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło, w które następnie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów koło i tak dalej. Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół.

12.13. Wyrazy a_1, a_2, \dots, a_{10} pewnego nieskończonego ciągu (a_n) spełniają warunki

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20$, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$. Wiedząc, że nieskończony ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 4^{3a_n+5}$ jest ciągiem geometrycznym, oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) .

12.14. Wartości funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają dla każdego $x \in D_f$ następujące równanie:

$1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = \frac{1}{2x^2 - 3x}$, gdzie lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

12.15. Oblicz granice ciągów o wyrazie ogólnym (a_n) :

(a) $a_n = 2^{\frac{1}{n}} + \frac{3n+5}{2n}$

(b) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n+3}$

(c) $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{3+\frac{2}{n}}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5}$

(e) $a_n = \frac{2^{n+3} - 5}{4^n + 3}$

(f) $a_n = \frac{2n^7 + 12n^2 + 3n + 5}{(2n^2 + 1)^2(3n - 7)}$

(g) $a_n = \sqrt{3n^2 + 2n - 7} - n\sqrt{3}$

(h) $a_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{3-n}$

(i) $a_n = \sqrt{\frac{9n^2 + 4n}{n^2 + 3}}$

(j) $a_n = \frac{\sqrt{3n^2 + 12(2n+7)}}{5n^2 + \sqrt{2n+1}}$,

(k) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} + \frac{n+1}{n}$.

