Lista 13.

Indukcja matematyczna i dwumian Newtona

13.1. Oblicz:

(a) $\binom{9}{6}$ **(b)** $\binom{n}{n-3}$ **(c)** $\binom{n+1}{2}$

(d) $\dfrac{100!\,48!}{98!\,51!}$ **(e)** $\dfrac{(n-1)!\,(3n)!}{(3n-1)!\,n!}$ **(f)** $\dfrac{(2n)!\,(n-2)!}{(2n+1)!\,n!}$.

13.2. Rozwiąż równanie: $\left[\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m}\right] \cdot \dfrac{1}{n-m+1} = \dfrac{1}{3!}$.

13.3. Rozwiń korzystając z dwumianu Newtona $(2x-y)^7$.

13.4. Wyznacz siódmy wyraz rozwinięcia $(2a+b^2)^8$.

13.5. Wykaż, że $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

13.6. Wykaż, że $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

13.7. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ wiedząc, że jego pierwszy wyraz jest rozwiązaniem równania $\binom{n+3}{2} = 15$.

13.8. Przy jakiej wartości n współczynniki drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu rozwinięcia dwumianu $(x+y)^n$ tworzą postęp arytmetyczny.

13.9. Wykaż, że $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

13.10. Metodą indukcji udowodnij, że suma kwadratów n początkowych liczb naturalnych jest równa $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

13.11. Udowodnij metodą indukcji, że dla każdej liczby naturalnej zachodzą równości:

(a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$

(b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(c) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n-1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

13.12. Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że:

(a) $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$

(b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ dla $n > 1$.

13.13. Wykaż, że dla każdego naturalnego n, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

13.14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10.

13.15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego