

WYRAŻENIA ARYTMETYCZNE I ALGEBRAICZNE

1. Wylicz b z równania

a) $ba + a^2 = 1 + b$;

b) $a = \frac{b-1}{b+a}$;

c) $a - b = \frac{b-1}{a}$;

d) $\frac{a^2+ab}{b} = 3$.

2. Oblicz

a) $\left[4 \cdot (0,5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}$;

b) $\frac{\sqrt{5}^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1}}{125^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}}$;

c) $(0,5)^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot (0,25)^{\sqrt{2}}$;

d) $(2 - \sqrt{3})^{\sqrt{2}} (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

3. Doprowadź do możliwie najprostszej postaci wyrażenia

a) $\left(\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}\right) (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$;

b) $\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$;

c) $\left(\sqrt{a} + \frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right) : (b\sqrt{a} + b\sqrt{ab^2+c})$.

4. Wykonaj działania

a) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{2x+2y}{ax^2+2axy+ay^2}$;

b) $\frac{2a^3-2b^3}{3a+3b} : \frac{a^2-2ab+b^2}{6a^2-6b^2}$;

c) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a^2+5a}{a^2-9}$;

d) $\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3} : \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$;

e) $(2a^2b^3c)^6 \cdot (-ab^2c^2d)^4$;

f) $(2xyz^2)^2 \cdot (-3x^2y^4x^5)^3 : (-3x^2yz)^3$;

g) $(-3a^{m+n}b^{m-n}c) : (-1,5a^mb^{-n})$;

h) $(8x^py^nz^a) : (-4x^{p-2}y^2z^{a-4})$.

5. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję

a) $-(3+x)^2 + 5(1-x)^2 - 3(1-x)(1+x)$;

b) $4(m+3n)^2 + 3(4m-n)^2 - 2(m+n)(m-n)$.

6. Naskicuj wykres funkcji

a) $y = |x| + 1$;

b) $y = |x| - 3$;

c) $y = |x+2| - 1$;

d) $y = |x-1| + 3$;

e) $y = |x^2 - 4| - 2$;

f) $y = -|x^2 - 2|$.

7. Rozwiąż równanie lub nierówność

- a) $|x| = 3$; b) $|x + 5| = 2$; c) $x + |x - 1| = 1$;
d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2$;
e) $|3 - x| > 1$; f) $|2x - 1| \leq 1$; g) $|x - 2| < 4$;

8. Przedstaw ilustracje graficzne nierówności

- a) $y > |x| + 1$; b) $y \leq |x - 4|$; c) $|x| + |y| \leq 1$;
d) $|x| + |y| > 2$.

WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

1. Podaj postać kanoniczną oraz iloczynową. Narysuj wykres funkcji.

- a) $w(x) = x^2 - 2x + 1$; b) $w(x) = x^2 - 5x$;
 c) $w(x) = -x^2 + 1$; d) $w(x) = x^2 - 3x + 2$;
 e) $w(x) = 2x^2 - 10x + 8$; f) $w(x) = x^2 + x + 1$.

2. Wyznacz rzeczywiste pierwiastki wielomianu $w(x)$ oraz podaj jego postać iloczynową:

- a) $w(x) = \pi - x$; b) $w(x) = x^2 - 5x + 6$;
 c) $w(x) = x^{20} - 1$; d) $w(x) = x^4 - 3x^2 + 2$;
 e) $w(x) = 7x^5 - 224$; f) $w(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8$;
 g) $w(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 1$; h) $w(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

3. Naszkicuj wykresy wielomianów: $w(x) = x, p(x) = x^2, q(x) = x^3, r(x) = x^4$ oraz $s(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

4. Naszkicuj wykresy wielomianów o podanych wzorach $w(x)$ i w każdym przypadku podaj rozwiązanie nierówności $w(x) \leq 0$.

- a) $w(x) = 2x(x+1)(x-2)$; b) $w(x) = -4(x - \sqrt{3})^2(x+1)^3(x-5)$;
 c) $w(x) = 2x^3(2x+1)(x^2-4)$; d) $w(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

5. Rozwiąż algebraicznie układy równań

- a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 + y^3 = 28 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (x-y)^2 = \frac{2}{3} \\ xy = \frac{1}{3} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 1 = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$.

6. Podaj ilustracje graficzne układów nierówności

- a) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 2x + 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ y - 8 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 - 2x + y \leq 0 \end{cases}$.

7. Rozwiąż nierówności

- a) $\frac{3}{x} < 2 + x$ - podaj ilustrację graficzną; b) $\frac{1}{x} \leq x^2$;
 c) $\frac{x(x-5)}{1-x} \geq 0$; d) $\frac{(1-x)(x+2)}{(2x+3)^2} > 0$; e) $\frac{2(x+3)(x-2)^2}{(x-1)^3} \leq 0$;
 f) $x + \frac{1}{x} \geq 0$; g) $\frac{-2x^2-3x+2}{(x-3)^2} \leq 0$; h) $\frac{1}{(x-1)^2} \geq 0$;

8. Naszkicuj wykresy funkcji

- a) $y = \frac{1}{3x}$; b) $y = -\frac{2}{x}$; c) $y = \frac{x+2}{x-3}$; d) $y = \frac{2x}{3x-6}$;

9. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiąż nierówność: $f(x) - f(\frac{1}{x}) < f(x^3) - f(\frac{1}{x^3})$.

FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

1. Naszkicuj wykresy funkcji

a) $y = 3^x$;

b) $y = (\frac{1}{3})^x$;

c) $y = (0.1)^x$;

d) $y = 2^{2x}$;

e) $y = 2^{-x}$;

f) $y = 10^{x-1}$.

2. Rozwiąż graficznie układy równań

a) $\begin{cases} y = 2^x \\ y + 2x = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y = (\frac{1}{2})^x + 1 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y = 3^x \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} y = 3^{x+1} - 3 \\ y = x \end{cases}$.

3. Rozwiąż równania

a) $2^{x+3} = 4^{x-1}$;

b) $(0,25)^{3x-1} = (\sqrt{2})^{5-x}$;

c) $(0,04)^{-2} = 5^{11x^2+7x}$.

4. Wykreśl w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji

a) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_3 x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_2 x$.

5. Sporządź wykresy funkcji

a) $\log_2 8x$;

b) $\log_3 \frac{x}{9}$;

c) $\log(x+5)$;

d) $\log(x-3)$;

e) $\log_2 x^3$;

f) $|\log_2 x|$.

6. Oblicz:

a) $\log_3 27$;

b) $\log_{10} 0,01$;

c) $\log_{\sqrt{2}} 2$;

d) $2^{\log_2 5}$;

e) $9^{\log_3 7}$;

f) $\log_5 5\sqrt{5}$;

g) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$;

h) $\log_6 1$;

i) $\log_4 4$.

7. Korzystając z kalkulatora lub tablic logarytmicznych oblicz

a) $\log_4 0,015$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 1000$;

c) $\log_7 5$;

d) $\log_{100} 25$.

8. Wyznacz dziedzinę funkcji

a) $f(x) = \log(x+2)$;

b) $f(x) = \log_3(x^2-3)$;

c) $f(x) = \log(2x-5) - \log_5(x^2-4)$;

d) $f(x) = \log_{0,5}(2x+1)$; e) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(4x^2-9)$; f) $f(x) = \log(x-5) - \log(x^2-25)$.

9. Rozwiąż równania

a) $3^x = 7$;

b) $\log_2 x = 5$;

c) $3^{\log x} = \frac{1}{27}$;

d) $0,5 \cdot 2^x = 10$;

e) $\log_x 2 = 3$;

f) $10^{\log x} = 4$.

10. Wyznacz wskazaną wielkość

a) $\log y = 2 \Rightarrow y = ?$

b) $\log_2 y = x \Rightarrow y = ?$

c) $\log_3 a = 8 \Rightarrow a = ?$

d) $\log_5 b = x+1 \Rightarrow b = ?$

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZE

1. Podaj w radianach następujące miary kątów: 15° , 120° , 225° , 300° , 1125° .
2. Oblicz wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów o następujących miarach: 135° , 150° , 240° , 1740° , 660° , -150° .
3. Wyraż za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów dodatnich nie większych od 45° : $\sin 115^\circ$, $\cos 315^\circ$, $\operatorname{tg} 165^\circ$, $\cos 1000^\circ$, $\operatorname{ctg} 85^\circ$.
4. Uzupełnij tabelę. Jeśli kąt nie istnieje, wpisz znak \times :

| α | (0,90) | (90,180) | (180,270) | (270,360) |
|-----------------------|--------|----------|-----------|-----------|
| $\cos \alpha$ | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | | | | |
| $-\frac{1}{2}$ | | | | |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | |

5. Wpisz odpowiednią miarę kąta do tabeli (o ile istnieje)

| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|-----------------------|---------------|----------------|----------------------|-----------------------|
| $\cos \alpha$ | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | | | | |
| $-\frac{1}{2}$ | | | | |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | |

6. Zbadaj, czy istnieje kąt α taki, że
 - a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$;
 - b) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$;
 - d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
7. Oblicz
 - a) $\sin(\alpha + 45^\circ)$ mając dane $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
 - b) $\cos(60^\circ - \alpha)$ mając dane $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

8. Uprość wyrażenie

a) $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$; b) $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha$;
c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; d) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

9. Dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ wykonaj wykresy następujących funkcji

a) $y = 1 - \cos x$; b) $y = 2 \sin(\frac{\pi}{2} - x)$; c) $y = \frac{1}{2} |\sin 2x|$;
d) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; e) $y = -2 \sin 2x$; f) $y = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{2})$.

10. Rozwiąż równania

a) $\sin 2x = 1$; b) $\cos x = -\frac{1}{2}$; c) $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$; f) $\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

11. Dane są dwa boki a, b trójkąta ABC . Obliczyć bok c , jeżeli wiadomo, że miara kąta C jest dwa razy większa od miary kąta B .

12. Dwa boki trójkąta mają długości 2 cm i 4 cm, a miara kąta między nimi wynosi 120° . Oblicz obwód tego trójkąta, jego pole oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

13. Dany jest trójkąt o bokach długości: 10,10, 14. Określ czy jest to trójkąt rozwartokątny. Oblicz jego pole.

ELEMENTY GEOMETRII ANALITYCZNEJ

- Mając dane punkty
 - $A(1, 2), B(5, 6), C(7, 8)$, znajdź współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i \overrightarrow{BC} oraz ich długości;
 - $A(1, 3), B(2, 4), C(5, 14)$, znajdź długości wektorów $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- Znajdź cosinus kąta między wektorami \vec{u} i \vec{v} mając dane:
 - $\vec{u} = [1, 2], \vec{v} = [-3, 4]$;
 - $\vec{u} = [-4, 2], \vec{v} = [2, 4]$;
 - $\vec{u} = [0, 2], \vec{v} = [5, -5]$;
 - $\vec{u} = [1, 1], \vec{v} = [-5, -2]$.
- Dane są wierzchołki trójkąta $A(1, 1), B(3, 5)$ i $C(2, 4)$. Napisz równania prostych AB, AC i BC .
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór A , jeżeli:
 - $A = \{(x, y) : x \geq 1 \wedge y \leq -2\}$;
 - $A = \{(x, y) : y \geq -2x + 3 \wedge y \leq x + 1\}$;
 - $A = \{(x, y) : x + y - 2 \geq 0 \wedge -x + 2y + 3 \leq 0\}$;
- Opisz za pomocą równania lub nierówności:
 - okrąg;
 - koło;
 - wnętrze koła;
 - zewnątrze kołao środku $S(2, -1)$ i promieniu $r = 3$. Czy punkt $P(5, -1)$ należy do wnętrza tego koła?
- Podaj długość promienia i współrzędne środka okręgu o równaniu:
 - $x^2 + y^2 = 5$;
 - $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;
 - $x^2 + y^2 - 4x = 0$;
 - $x^2 + y^2 + y = 0$.
- Narysuj okręgi z poprzedniego zadania w układzie współrzędnych.
- Zbadaj wzajemne położenie okręgów o równaniach:
 - $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ i $(x + 3)^2 + y^2 = 1$;
 - $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ i $(x + 5)^2 + y^2 = 1$;
 - $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ i $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
- Zbadaj wzajemne położenie:
 - prostej $x + 2y - 3 = 0$ i okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$;
 - prostej $x + 4y - 1 = 0$ i okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 5y = 0$;
 - prostej $2x + y = 0$ i okręgu $x^2 + x + y^2 = 0$.

ELEMENTY KOMBINATORYKI I CIĄGI LICZBOWE

1. Oblicz:

a) $\frac{9!}{8!}$; b) $\frac{8!}{3!5!}$; c) $\frac{6!}{0!}$; d) $\binom{20}{2}$.

2. Rozwiąż równanie:

a) $\binom{n}{2} = 10$; b) $\binom{n}{3} = 4$; c) $\binom{n}{4} = 35$; d) $\binom{n}{n-2} = 45$.

3. Utwórz wszystkie trzelementowe kombinacje z elementów zioru $A = \{a, b, c, d, e\}$ zakładając, że wszystkie elementy zbioru A są różne.

4. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 ułożono wszystkie możliwe liczby pięciocyfrowe o nie powtarzających się cyfrach. Ile jest wśród nich liczb:

a) zaczynających się cyfrą 3; b) nie zaczynających się cyfrą 5;
c) podzielnych przez 2; d) podzielnych przez 25.

5. Zbadaj monotoniczność ciągów o wyrazach ogólnych:

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$; b) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$; c) $a_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$;
d) $a_n = \frac{1-3^n}{2}$; e) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$; f) $a_n = \frac{2+4+\dots+2n}{n^2+2}$.

6. Sprawdź, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2^n}{n!}$, ($n > 1$) jest ciągiem malejącym.

7. Oblicz granice ciągów o wyrazach ogólnych:

a) $a_n = \frac{3n^2-n}{5-n^2}$; b) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; c) $a_n = n - \sqrt{n^2+4}$; d) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{4n^4+3n+1}}$.

8. Podaj przykład ciągu, który jest zbieżny do 2, ale nie jest monotoniczny.

9. Suma n -pierwszych wyrazów pewnego ciągu wynosi $S_n = 2n^2 + 3$. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

10. Rozwiąż równanie: $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$.

11. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 1. Dla jakiej wartości różnicy r tego ciągu wyrażenie $a_1a_3 + a_2a_3$ ma wartość najmniejszą?

12. Rozwiąż równania:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 2$; b) $\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = -1$.