

Lista VII.

Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.

7.1. Sporządź wykresy podanych funkcji. Określ zbiór wartości tych funkcji, wyznacz ich wartość najmniejszą i największą. Jeśli podana funkcja jest funkcją okresową to podaj jej okres.

7.2. $y = \sin 2x$.

7.3. $y = \cos x - 1$.

7.4. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

7.5. $y = |\operatorname{ctg} x|$.

7.6. $y = 2 \sin \frac{x}{2} - 1$.

7.7. $y = 1 - \frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

7.8. Uzupełnij poniższe tabele. Jeśli kąt nie istnieje, wpisz znak \times :

		$(0, 90^\circ)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	$(180^\circ, 270^\circ)$	$(270^\circ, 360^\circ)$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$				
	$-\frac{1}{2}$				
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				

		$(0, 90^\circ)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	$(180^\circ, 270^\circ)$	$(270^\circ, 360^\circ)$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}$				
	$-\frac{1}{2}$				
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				

		sin α							
		0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos α	0								
	$\frac{1}{2}$								
	$-\frac{1}{2}$								
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$								
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$								
	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$								
	1								

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.
Wzory redukcyjne.

7.9. Oblicz wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów o następujących miarach: 135° , 150° , 240° , 1740° , 660° , -150° .

7.10. Wyraż za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów dodatnich nie większych od 45° :
 $\sin 115^\circ$, $\cos 315^\circ$, $\operatorname{tg} 165^\circ$, $\cos 1000^\circ$, $\operatorname{ctg} 85^\circ$.

7.11. Oblicz bez użycia tablic matematycznych:

(a) $\sin 1200^\circ + \cos(-1080^\circ)$, (b) $4 \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ$, (c) $2 \sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ$.

7.12. Uprość wyrażenia:

(a) $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$; (b) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$;

(c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; (d) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

(e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$;

(f) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi - x) \left[\operatorname{tg}(\pi + x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \right]$;

(g) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; (h) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$, (i) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$;

(j) $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha$; (k) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; (l) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

Tożsamości trygonometryczne.

Udowodnić, że:

7.13. $\sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ - 4 \cos 20^\circ = 1.$

7.14. $\cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ.$

7.15. $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2 \sin 203^\circ \cdot (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ) = 0.$

Sprawdź następujące tożsamości. Dla jakich x równości te nie zachodzą?

7.16. $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x.$

7.17. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$

7.18. $(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x) = \sin^2 x.$

7.19. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x.$

7.20. $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x.$

7.21. $1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}.$

7.22. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$

7.23. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$

Udowodnić następujące tożsamości:

7.24. $\sin 2x - \operatorname{tg} x = \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x.$

7.25. $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x.$

7.26. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$

7.27. $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y.$

7.28. $1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$

7.29. $\frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} = 1 + \sin x.$

7.30. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$

7.31. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x.$

7.32. $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

7.33. $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin 2x.$

Rozwiąż podane równania:

7.34. $\sin 2x = 1.$

7.35. $\sin 3x = 0.$

7.36. $\operatorname{tg} 3x = -1$

7.37. $\cos 3x = -\frac{1}{2}.$

7.38. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1.$

7.39. $\operatorname{tg} \left(-\frac{x}{4} - 1 \right) = \sqrt{3}.$

7.40. $\sin(2x - 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

7.41. $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}.$

7.42. $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}.$

7.43. $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

7.44. $4 \operatorname{ctg}(2x - \pi) = \frac{1}{4}.$

7.45. $\frac{1}{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{5} \right) = -\frac{1}{6}.$

