4 Wielomiany i działania na nich.

Definicja 1. *Jednomianem* jednej zmiennej nazywamy wyrażenie postaci ax^n, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, zwaną *współczynnikiem jednomianu*, n jest liczbą naturalną, a x jest zmienną.
Jednomianem m zmiennych nazywamy wyrażenie postaci $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, zwaną *współczynnikiem jednomianu*, $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, a $x_1, x_2, \ldots, x_m$ są zmiennymi.

Przykłady jednomianów: $2xz$, $-7a$, x^3y^2z.
Wyrażenia algebraiczne $\frac{a}{b}$, $2\sqrt{x}$ nie są jednomianami.

Definicja 2. *Wielomianem* nazywamy wyrażenie będące sumą jednomianów lub jednomianem.
Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie, które ma postać

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$.
Liczby a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_2, a_1, a_0 nazywamy *współczynnnikami wielomianu*.
Jeżeli $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = 0$ i $a_0 \neq 0$, to taki wielomian nazywamy *wielomianem stałym*, a jego stopień równa się zeru.
Jeżeli $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, to taki wielomian nazywamy *wielomianem zerowym*. Przyjmuje się, że stopień wielomianu zerowego nie jest określony.

Uwaga 3. *Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, jest wielomianem stopnia pierwszego, natomiast funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, jest wielomianem stopnia drugiego.*

Dwa wielomiany są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są wielomianami tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.
Na przykład wielomiany $W(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ i $Q(x) = 1 - 3x + x^2 + 2x^3$ są równe.

Jeżeli w wielomianie jednej zmiennej w miejsce zmiennej podstawimy ustaloną liczbę, to po wykonaniu wskazanych działań otrzymamy *wartość wielomianu* dla tej liczby. W wielomianie m zmiennych należy podstawić ciąg m liczb, aby otrzymać wartość liczbową wielomianu dla tego ciągu.

W zbiorze wielomianów tych samych zmiennych wykonalne są następujące **działania:**

dodawanie, **odejmowanie** i **mnożenie**.

Aby dodać wielomian musimy dodać wyrazy podobne oraz uporządkować je.
Mnożenie wielomianów polega na wymnożeniu przez siebie wyrazów obu wielomianów.

Działania dodawania i mnożenia są działaniami przemiennymi oraz łącznymi.

Przykład 4. Niech $W(x) = x^2 - 1$ i $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 1$. Wtedy

$$W(x) + Q(x) = 2x^3 - 2,$$

$$W(x) - Q(x) = -2x^3 + 2x^2,$$

$$W(x) \cdot Q(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 1.$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie do dzielenia liczb całkowitych.

Przykład 5. Niech $W(x) = x^4 - 1$ i $P(x) = x + 1$. Wtedy $\dfrac{W(x)}{P(x)} = \dfrac{x^4 - 1}{x + 1} = x^3 - x^2 + x - 1$.

Wielomian W *jest podzielny przez wielomian* P, jeżeli istnieje wielomian Q, taki że

$$W(x) = P(x)Q(x).$$

Np. wielomian $x^2 - 1$ jest podzielny przez wielomian $x + 1$, gdyż $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Twierdzenie 6 (Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianów)**.** *Dla każdego wielomianu W i każdego niezerowego wielomianu P istnieją wielomiany Q i R, takie że*

$$W = QP + R$$

i stopień wielomianu R jest mniejszy od stopnia wielomianu P lub wielomian R jest wielomianem zerowym.

Wielomian R nazywamy *resztą z dzielenia W przez P*.

Przykład 7. Niech $W(x) = x^4 - x^2$ i $P(x) = x^2 - 2$. Wtedy

$$\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 2} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^2 - 2} \quad \Rightarrow \quad x^4 - x^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 2) + 2.$$

Zatem wielomian $R(x) = 2$ jest resztą z dzielenia W przez P.

Jeżeli R jest wielomianem zerowym, to mówimy, że wielomian P jest *dzielnikiem wielomianu W*. Wówczas otrzymujemy równość $W = QP$, z której wynika, że Q też jest dzielnikiem W.

4.1 Twierdzenie Bézoute'a, rozkład wielomianu na czynniki, równania, nierówności wielomianowe

Miejscem zerowym (*pierwiastkiem*) wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nazywamy liczbę $x_0 \in \mathbb{R}$, dla której wartość wielomianu jest równa 0, tzn. $W(x_0) = 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Twierdzenie 8 (Twierdzenie Bézoute'a).
Liczba x_0 jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - x_0)$.

Dowód. Załóżmy, że liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W. Na mocy Twierdzenia o dzieleniu z resztą (patrz Twierdzenie 6) mamy $W(x) = (x - x_0)Q(x) + R$, gdzie Q i R są wielomianami, przy czym R jest wielomianem stałym. Podstawiając $x = x_0$ dostajemy $W(x_0) = (x_0 - x_0)Q(x_0) + R = R$. Z założenia wiemy, że $W(x_0) = 0$, zatem $R \equiv 0$, więc wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.
Odwrotnie, niech $W(x) = (x-x_0)P(x)$, gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem. Wówczas $W(x_0) = (x_0 - x_0)P(x_0) = 0$. □

Twierdzenie 9. *Jeśli $x_0 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$, jest wymiernym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ i $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n$, to p dzieli a_0 i q dzieli a_n.*

Dowód. Załóżmy, że $x_0 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$, jest wymiernym pierwiastkiem wielomianu W oraz liczby p i q są względnie pierwsze. Wtedy $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, tzn.

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Stąd $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \cdots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$, zatem

$$a_0 \cdot q^n = -p \cdot \left(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}\right), \tag{1}$$
$$a_n \cdot p^n = -q\left(a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1}\right). \tag{2}$$

Ponieważ NWD(p, q)=1, więc z (1) p dzieli a_0 i z (2) q dzieli a_n

□

Wniosek 10. *Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ i $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n$, ma miejsce zerowe $x_0 \in \mathbb{Z}$, to x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.*

Rozkład na czynniki wielomianu polega na przedstawieniu go w postaci iloczynu wielomianów.

Twierdzenie 11 (o postaci iloczynowej).
Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ i $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, ma n różnych miejsc zerowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to

$$W(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Twierdzenie 12 (o rozkładzie wielomianu na czynniki).
Każdy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu czynników co najwyżej drugiego stopnia.

Liczba x_0 jest *k-krotnym miejscem zerowym* wielomianu W, jeżeli ten wielomian jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Metody rozkładania wielomianów na czynniki:

- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
- grupowanie wyrazów,
- stosowanie wzorów skróconego mnożenia,
- zastosowanie twierdzenia Bézouta.

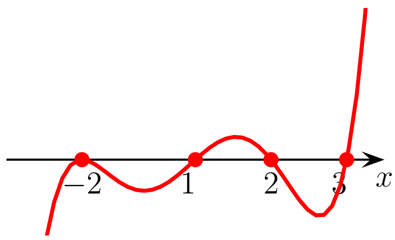
4.2 Nierówności wielomianowe.

Nierównością wielomianową nazywamy każdą nierówność w postaci: $P(x) > 0$, $P(x) \geqslant 0$, $P(x) < 0$ oraz $P(x) \leqslant 0$, gdzie P jest wielomianem.

4.2.1 Rozwiązywanie nierówności wielomianowych.

- przenosimy wszystko na jedną stronę
- rozkładamy wielomian na czynniki
- rozwiązujemy otrzymaną nierówność wielomianową będącą w postaci iloczynowej.

Przykład 13. Rozwiążmy nierówność $(x-3)^3 \cdot (x+2)^2 \cdot (1-x) \cdot (2-x) \leqslant 0$.
Wówczas



Zatem $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$.