Wykłady z Matematyki stosowanej w inżynierii środowiska, II sem.

Wykład 1

1. RACHUNEK ROŻNICZKOWY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1.1. Ekstrema funkcji.

1.2. Ekstrema warunkowe.

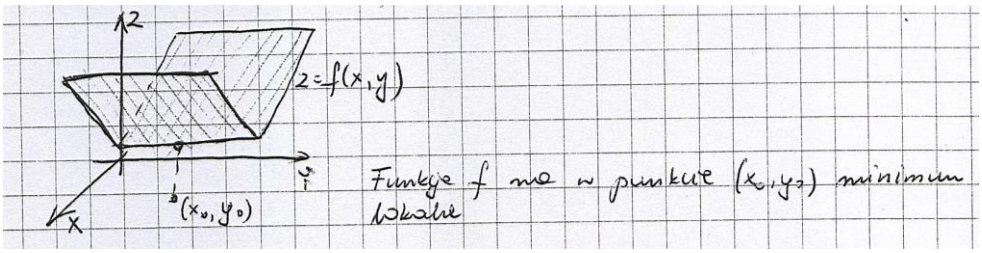
1.3. Funkcje uwikłane.

1.1. Ekstrema funkcji

1A1 Definicja (minimum lokalne funkcji dwóch zmiennych)

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego punktu (x, y) z tego otoczenia zachodzi:

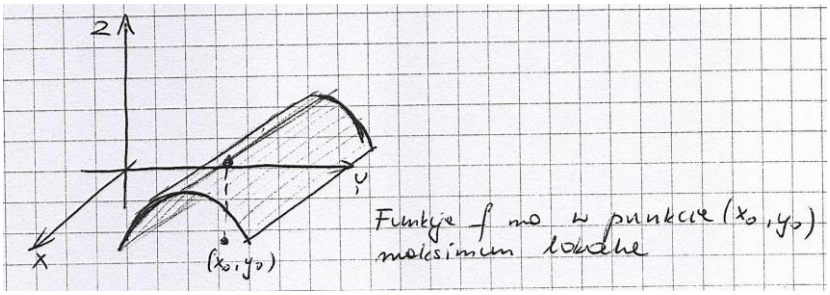
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$



1A2 Definicja (maksimum lokalne funkcji dwóch zmiennych)

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego punktu (x, y) z tego otoczenia zachodzi:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$



1A3 Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1) ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0)

2) istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

1A3 Uwaga

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zerowanie się w punkcie obu pochodnych cząstkowych nie gwarantuje jeszcze istnienia ekstremum lokalnego.

1A4 Fakt (o lokalizacji ekstremów funkcji)

Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są równe 0 albo w punktach, w których choć jedna z tych pochodnych cząstkowych nie istnieje.

1A5 Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech funkcja f spełnia warunki:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,

2) $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0.$

Wtedy funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne i jest to minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ albo maksimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$.

1A6 Uwaga

Gdy wyznacznik w punkcie 2) w twierdzeniu 1.5 jest ujemny, to funkcja nie ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalnego. W przypadku, gdy wyznacznik ten równa się 0, to badanie, czy funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) przeprowadzamy innymi metodami (np. korzystając z definicji).

1A+B7 Przykład

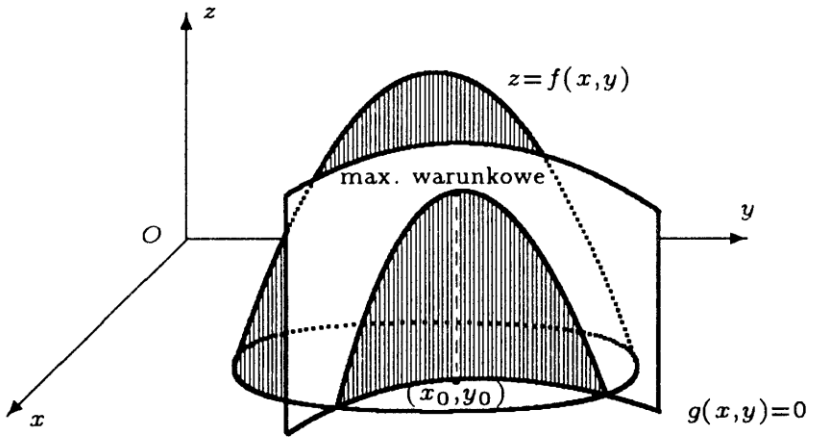
Znaleźć ekstrema lokalne podanych funkcji

a) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, b) $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 27xy + 1$, c) $f(x, y) = |x| + |y|$.

1.2. Ekstrema warunkowe

1A+B8 Definicja (ekstrema warunkowe funkcji)

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe przy warunku $g(x,y)=0$, gdy $g(x_0,y_0)=0$ oraz istnieje liczba $\delta>0$ taka, że $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ dla każdego punktu $(x,y)\in S((x_0,y_0),\delta)$ spełniającego warunek $g(x,y)=0$ ($S((x_0,y_0),\delta)$ – sąsiedztwo punktu (x_0,y_0) o promieniu δ) .



Funkcja f osiąga w punkcie (x_0, y_0) maksimum przy warunku $g(x,y)=0$.

1A+B9 Fakt (algorytm znajdowanie ekstremów warunkowych)

Ekstrema lokalne funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x,y)=0$ znajdujemy według algorytmu:

1) krzywą $\Gamma: g(x,y)=0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y=h(x)$, gdzie $x\in I$ lub postaci $x=p(y)$, gdzie $y\in J$;
2) szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x,h(x))$ na przedziale I lub funkcji $f(p(y),y)$ na przedziale J;
3) porównujemy wartości otrzymanych ekstremów na krzywej Γ i ustalamy ekstrema warunkowe.

1A+B10 Przykład. Znaleźć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

a) $f(x,y)=xy,\ x+y=0;$ b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ xy=4.$

1A11 Fakt (algorytm znajdowania wartości ekstremalnych na obszarze domkniętym)

Wartość najmniejszą $f_{\min}$ i największą $f_{\max}$ funkcji f na ograniczonym obszarze domkniętym i ograniczonym znajdujemy w następujący sposób:

1) szukamy ekstremów lokalnych tej funkcji na obszarze otwartym,
2) szukamy ekstremów lokalnych tej funkcji na brzegu obszaru,
3) porównujemy wartości otrzymanych ekstremów we wnętrzu i na brzegu
4) obszaru oraz na tej podstawie ustalamy wartość najmniejszą i największą funkcji na obszarze.

1A12 Przykład. Znaleźć wartości największe i najmniejsze podanych funkcji na wskazanych obszarach domkniętych:

a) $f(x,y)=x^2+2xy-4x-8y,\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2;$ b) $f(x,y)=x^2y,\ x^2+y^2\le 1.$

1.3. Funkcje uwikłane

1A13 Definicja (funkcje uwikłane)

Funkcją uwikłaną określoną przez warunek $F(x,y)=0$ nazywamy każdą funkcję $y=y(x)$ spełniającą równość $F(x,y(x))=0$ dla wszystkich x z pewnego przedziału I. Podobnie określa się funkcję uwikłaną postaci $x=x(y)$ gdzie $y\in J$.

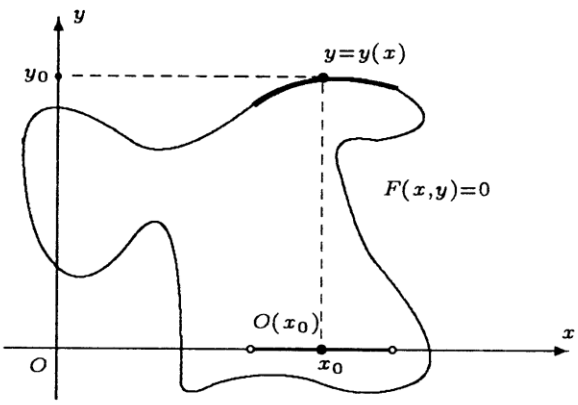
1A+B14 Twierdzenie (o funkcji uwikłanej)

Niech $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ oraz niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0,y_0)$. Ponadto niech

1) pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ są ciągłe na tym otoczeniu,
2) $F(x_0,y_0)=0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Wtedy na pewnym otoczeniu $O(x_0)$ istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y=y(x)$ spełniająca warunki

a) $F(x,y(x))=0$ dla każdego $x\in O(x_0)$,
b) $y(x_0)=y_0$,
c) $y'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$ dla każdego $x\in O(x_0)$.



Rys. 4.7.2. Ilustracja do twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej.

1B15 Uwaga. Jeżeli funkcja F ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ oraz spełnia warunki

$$F(x_0, y_0) = 0\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

to funkcja uwikłana $y = y(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na pewnym otoczeniu punktu x_0.

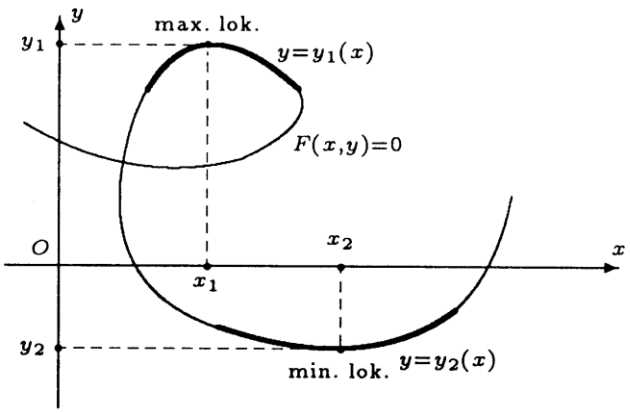
1A+B16 Twierdzenie (o ekstremach lokalnych funkcji uwikłanej)

Niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ i niech ma tam ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Ponadto niech

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$
3. $A = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0.$

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona przez równanie $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe i jest to:

a) minimum gdy $A > 0$ albo
b) maksimum gdy $A < 0$.



Rys. 4.7.3. Funkcja uwikłana $y = y_1(x)$, określona przez warunek $F(x, y) = 0$, ma w punkcie x_1 maksimum lokalne, a funkcja $y = y_2(x)$ ma w punkcie x_2 minimum lokalne właściwe.

1A+B17 Fakt (algorytm znajdowania ekstremów lokalnych funkcji uwikłanej)

1) Punkty, w których funkcja uwikłana może mieć ekstrema lokalne, znajdujemy korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum. W tym celu rozwiązujemy układ warunków:

$$F(x_0, y_0) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

2) W otrzymanych punktach sprawdzając warunek wystarczający istnienia ekstremum badamy czy zachodzi warunek

$$A = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0.$$

3) Na podstawie znaku ostatniego wyrażenia ustalamy rodzaj ekstremum.

1A+B18 Przykład. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej postaci *y=y(x)* określonej przez podane warunki:

a) $x^3 + y^3 - 8xy = 0$, b) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$.