
Matematyka 2

dr inż. Rajmund Stasiewicz

Skala ocen

Punkty	Ocena
0 – 50	2,0
51 – 60	3,0
61 – 70	3,5
71 – 80	4,0
81 – 90	4,5
91 – ∞	5,0

Zwolnienie z
egzaminu

Ocena z egzaminu $\equiv$ liczba punktów z ćwiczeń - 5

Warunki zaliczenia

- ☐ 6 x kolokwium → ok. 15 pkt.
 - ☐ 6 x kartkówka → 2-3 pkt.
 - ☐ Razem – 100-110 pkt.

 - ☐ Dodatkowe punkty:
 - odpowiedzi i przygotowanie do zajęć
(min 50 pkt. za kolokwia i kartkówki)
-

Kontakt i wyniki

Wyniki i materiały:

katmat.pb.bialystok.pl/~raj/energetyka

Login: imie.nazwisko

Hasło: dowolne (podawane przy rejestracji)

E-mail:

r.stasiewicz@pb.edu.pl

Matematyka 2

Szeregi Fouriera

Literatura

- ❑ W.Żakowski, M.Kołodziej; *Matematyka cz II*; WNT, Warszawa, 1984
 - ❑ W.Leksiński, I.Nabiałek, W.Żakowski; *Matematyka dla studiów esperymentalnych*; WNT, Warszawa, 1981
 - ❑ M.Gewert, Z.Skoczylas; *Analiza matematyczna 2*; Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2006
 - ❑ W.Stankiewicz; *Zadanie z matematyki dla wyższych uczelni technicznych cz I*; PWN, Warszawa, 1980
-

Funkcje okresowe

Definicja:

Funkcję $f: R \rightarrow R$ nazywamy okresową, jeżeli istnieje liczba $T > 0$ taka, że dla wszystkich $x \in T$

$$f(x+T) = f(x)$$

Szeregi trygonometryczne - definicja

Szeregiem trygonometrycznym na przedziale $<-l; l>$ nazywamy szereg postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

gdzie $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, l jest pewną liczbą dodatnią.

Szereg trygonometryczny Fouriera - definicja

Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna na przedziale $\langle -l, l \rangle$.

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Szereg trygonometryczny Fouriera - definicja

Piszemy symbolicznie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Nieciągłość pierwszego rodzaju

Punkt x_0 jest *punktem nieciągłości pierwszego rodzaju* funkcji $f(x)$, jeżeli istnieją granice lewo- i prawostronne funkcji $f(x)$ w tym punkcie oraz są one skończone.

Funkcja przedziałami monotoniczna

Funkcję f , ograniczoną w przedziale (a, b) , nazywamy *przedziałami monotoniczną* w tym przedziale, jeżeli przedział (a, b) można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów wewnątrz których funkcja f jest monotoniczna.

Warunki Dirichleta

Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia na przedziale $\langle a, b \rangle$ warunki Dirichleta, jeżeli:

- 1) $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna w przedziale (a, b) ,
- 2) $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) , z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju x_0 , takich że

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$$

- 3) w końcach przedziału (a, b) spełnione są równości

$$f(a) = f(b) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$$

Twierdzenie Dirichleta

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $\langle -l, l \rangle$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w szereg trygonometryczny Fouriera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

dla każdego $x \in \langle -l, l \rangle$. Jeżeli ponadto funkcja $f(x)$ jest okresowa i ma okres $2l$, to powyższa równość jest prawdziwa dla każdego x z dziedziny tej funkcji.

Przykład

Rozwinać w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad \text{dla } x \in \langle -\pi; \pi \rangle$$

Twierdzenie Dirichleta – uwagi praktyczne

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest **parzysta**, to

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

oraz

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

a rozwinięcie w szereg Fouriera przyjmuje postać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Twierdzenie Dirichleta – uwagi praktyczne

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest **nieparzysta**, to

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oraz

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

a rozwinięcie w szereg Fouriera przyjmuje postać

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Przykład

Rozwinać w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = |x| \quad \text{dla } x \in \langle -\pi; \pi \rangle$$

Szereg Fouriera – sinusów i kosinusów

Rozważmy funkcję f , która jest określona i spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta w przedziale otwartym $(0,l)$.

Funkcję tę można przedstawić w przedziale $(0,l)$ w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera składającego się z samych sinusów, albo samych kosinusów.

Szereg Fouriera – sinusów i kosinusów

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą f^* , określoną na przedziale $\langle -l, l \rangle$ nazywaną przedłużeniem funkcji f . Aby otrzymać rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg sinusów należy przedłużyć funkcję $f(x)$ w sposób nieparzysty.

$$f^* = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -l \\ -f(-x) & \text{dla } -l < x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ f(x) & \text{dla } 0 < x < l \\ 0 & \text{dla } x = l \end{cases}$$

Szereg Fouriera – sinusów i kosinusów

Aby otrzymać rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg cosinusów należy przedłużyć funkcję $f(x)$ w sposób parzysty.

$$f^* = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) & \text{dla } x = -l \\ f(-x) & \text{dla } -l < x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) & \text{dla } x = 0 \\ f(x) & \text{dla } 0 < x < l \\ \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) & \text{dla } x = l \end{cases}$$

Przykład

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{dla } -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = \pm\pi \\ \pi - x & \text{dla } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Szereg tryg. Fouriera – postać zespolona

Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna na przedziale $\langle -l, l \rangle$.

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Postać zespolona szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-j \frac{n\pi x}{l}} \right)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

Szereg tryg. Fouriera – postać zespolona

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-j \frac{n\pi x}{l}} \right)$$

Krócej

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi x}{l}}$$

Szereg tryg. Fouriera – postać zespolona

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $\langle -l, l \rangle$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w szereg zespolony Fouriera

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi x}{l}}$$

dla każdego $x \in \langle -l, l \rangle$. Przy czym

$$\text{dla } c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{j \frac{n\pi x}{l}} dx$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Szereg tryg. Fouriera – postać zespolona

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $\langle -l, l \rangle$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w szereg zespolony Fouriera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi x}{l}}$$

dla każdego $x \in \langle -l, l \rangle$. Przy czym

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{j \frac{n\pi x}{l}} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{j \frac{n\pi x}{l}} dx$$

Sz. zespolony Fouriera – widmo amplitudowe

Ciąg liczb (A_n) , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gdzie

$$A_n = |c_n|$$

nazywamy *widmem amplitudowym* funkcji okresowej

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Litera ω oznacza *pulsację* funkcji okresowej, czyli $\omega = \frac{2\pi}{T}$
gdzie T jest okresem tej funkcji.

Sz. zespolony Fouriera – widmo fazowe

Ciąg liczb (ϕ_n) , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gdzie

$$\phi_n = \begin{cases} \arg c_n & \text{gdy } \operatorname{Im} c_n \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } c_n \geq 0 \\ \pi \operatorname{sgn} n & \text{gdy } c_n < 0 \end{cases}$$

nazywamy *widmem fazowym* funkcji okresowej.

Szeregi trygonometryczne

KONIEC